早稲田大学 産業経営研究所『産業経営』
第43号 2008年11月 pp. 57-66

回帰の標準誤差をめぐって

坂 野 慎 哉

要　旨

回帰モデルの誤差項は，通常，平均値が0の確率変数と仮定される。古典的なモデルではさらに，誤差項の分散は未知の一定値と仮定される。回帰係数の推定値の有意性を評価するためには，この誤差項の未知の分散を推定する必要がある。

誤差項の分散の不偏推定量の正の平方根を，「回帰の標準誤差」と呼ぶ。この回帰の標準誤差が，誤差項の標準偏差の推定量として適当であることは，直感的にも納得できよう。しかし，回帰の標準誤差を平方したものが誤差項の分散の推定量として不偏性を持っているにもかかわらず，回帰の標準誤差そのものは，誤差項の標準偏差の推定量として不偏性をもたない。

この事実自体は広く知られていると思われるが，広く使われている計量経済学の標準的な大学院レベルのテキストには，意外にも，この事実について理由も含めて詳しく説明しているものが見当たらない。回帰の標準誤差の期待値について言及しないことは，回帰の標準誤差の平方が誤差項の分散の不偏推定量であるがゆえに，「回帰の標準誤差も誤差項の標準偏差の不偏推定量」という誤解を招く恐れがあろう。

そこで小稿では，回帰の標準誤差が一般化ガンマ分布に従うことを示した上で，その期待値を導出する。導出された期待値より，回帰の標準誤差が誤差項の標準偏差の不偏推定量でないことが明らかとなる。小稿のこの解説は，標準的な計量経済学テキストにおける回帰の標準誤差についての説明を補足する役割を持つと思われる。さらに小稿では，回帰の標準誤差が誤差項の標準偏差の推定量として不偏性をもたないことについて，統計・計量経済の初学者にも理解できそうな簡単な証明を提案する。

キーワード：回帰の標準誤差，不偏推定量，ガンマ分布，ガンマ関数，一般化ガンマ分布

Standard Error of Regression:
as a biased estimator of the standard deviation of an error term

Shinya SAKANO

Abstract

The error term of a regression model is normally assumed to be a random variable with mean 0. Moreover, in the classical model its variance is assumed to be a fixed unknown. The square root of an unbiased estimator of the variance of an error term is termed the "standard error of regression". We can understand intuitively that a standard error of regression is appropriate as an estimator of the standard deviation of an error term. But a standard error of regression is not an unbiased estimator of the standard deviation of an error term. Some popular econometrics text books do not explain in detail this fact.

To supplement explanation of these text books, this paper shows that a standard error of regression has a generalized gamma distribution, and a mean of a standard error of regression will be derived. This mean will indicate that a standard error of regression is not an unbiased estimator of the standard deviation of an error term. In addition, to facilitate beginners' understanding, a simple proof is proposed, in which it is proved that a standard error of regression is biased as an estimator of the standard deviation of an error term.

Key words: standard error of regression, unbiased estimator, gamma distribution, gamma function, generalized gamma distribution.

早稲田大学商学学術院准教授

1．はじめに

回帰モデルの誤差項は，通常，平均値が0の確率変数と仮定される。古典的なモデルではさらに，誤差項の分散は未知の一定値と仮定される。推定された回帰係数の推定値の有意性を評価するためには，この誤差項の未知の分散を推定する必要があるが，その不偏推定量はどんな計量経済学のテキストにでも載っている。

この不偏推定量の正の平方根を，「回帰の標準誤差」と呼ぶ。回帰の標準誤差は，誤差項の分散の推定量の正の平方根であるから，誤差項の標準偏差の推定量として適当であることは，直感的にも納得できよう。しかし，回帰の標準誤差を平方したものが誤差項の分散の推定量として不偏性を持っているにもかかわらず，回帰の標準誤差そのものは，誤差項の標準偏差の推定量として不偏性を持たない。

この事実自体は広く知られていると思われるが，Greene（2003）や Davidson and MacKinnon（1993）などのような，広く使われている大学院レベルの標準的な計量経済学のテキストには，意外にも，この事実について明示的に理由も含めて説明しているものが見当たらない。

竹村（1991）のような中級以上の数理統計学のテキストなら，母分散の不偏推定量の平方根が母標準偏差の不偏推定量になっていないことについて，簡単に言及しているものがある。これは，上述の回帰の標準誤差のケースとはやや違うが，非常によく似た例なので，そのレベルの数理統計学を修得済みの諸氏ならば，回帰の標準誤差が不偏性を持たないことについても類推できるであろう。しかし小生は，計量経済学のテキストの中でも，本件についてある程度説明しておくのが望ましいと思う。

小稿の目的は，資源配分メカニズム設計に関する実証分析をはじめとする，計量経済学的手法による実証分析の方法論を学ぶ諸氏を対象に，回帰の標準誤差について，標準的なテキストの説明を補足することにある。

以下，小稿の構成を述べる。2節では，記号の約束も兼ねて，小稿の目的を数式を用いてより具体的に説明する。3節では，回帰の標準誤差の確率密度関数を導出し，それを用いて回帰の標準誤差の期待値を実際に求める。このことにより，回帰の標準誤差が誤差項の標準偏差の不偏推定量でないことが厳密に示される。4節では，回帰の標準誤差が誤差項の標準偏差の推定量として不偏性をもたないことについて，より簡単な別証を与える。5節では，小稿の内容をまとめる。

2．誤差項の分散の不偏推定量

本節ではまず，記号の約束を兼ねて，回帰モデルの誤差項の分散の不偏推定量について小稿の議論に必要な最小限の説明を行う。

次の重回帰モデルを考える。

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \cdots + \beta_K x_{tK} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, T \tag{2.1}$$

ここで，$x_{t2}, \ldots, x_{tK}$ は説明変数，y_t は被説明変数，$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_K$ は回帰係数，ε_t は誤差項である。ε_t は平均が 0 の確率変数と仮定され，さらに古典的な仮定においてはその分散は t の値にかかわりなく一定の未知の値とされる。小稿ではそれを σ^2 とおこう。

(2.1)を最小 2 乗法（OLS）にて推定して得られる個々の残差を $e_t(t=1, \ldots, T)$ とおき，

$$\boldsymbol{e} \equiv \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_T \end{pmatrix}$$

と残差ベクトル $\boldsymbol{e}$ を定義する。(2.1)が OLS で推定される場合，σ^2 は，

$$S^2 \equiv \frac{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}}{T-K} \tag{2.2}$$

と定義される S^2 で推定されるのが通例である。ここで，$\boldsymbol{e}'$ は $\boldsymbol{e}$ を転置したベクトルとする。

さて，(2.1)の誤差項 ε_t が正規分布に従うと仮定して(2.1)を最尤法（ML）で推定した場合，多くの計量経済学のテキストで論じられているように，回帰係数の推定量は OLS で推定したときの推定量と一致する。したがって，ML 残差ベクトルもやはり OLS 残差ベクトル $\boldsymbol{e}$ と一致する。それゆえ，σ^2 の ML 推定量を $\hat{\sigma}^2$ とおくと，

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}}{T} \tag{2.3}$$

となる。これは，尤度関数の最大値を与える σ^2 の ML 推定量を解析的に求めた結果である。しかし，(2.1)を OLS 推定するときに σ^2 の推定量として用いられる S^2 は，$\hat{\sigma}^2$ と違って推定手法（この場合は OLS）から導かれる必然的結果ではない。OLS は ML と異なり，σ^2 の推定量を明示的に与えてはいないのである。

それではなぜ，OLS 推定においては σ^2 の推定量として，ML 推定量 $\hat{\sigma}^2$ と異なる S^2 がわざわざ用いられているのか。それは S^2 が σ^2 の推定量として不偏性を持っているから，すなわち $E(S^2) = \sigma^2$ が成り立つからである。これは，誤差項に正規性を仮定しなくとも成り立つが，証明については，標準的な計量経済学のテキストを参照していただきたい。$\hat{\sigma}^2$ に限らず，一般に ML 推定量は，一般的な条件のもとで，一致性を持つことが知られている。しかし ML 推定量が不偏性を持つ保証はなく，実際(2.2)と(2.3)から，

$$E(\hat{\sigma}^2) = E\left(\frac{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}}{T}\right) = E\left(\frac{T-K}{T}\frac{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}}{T-K}\right) = \frac{T-K}{T}E\left(\frac{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}}{T-K}\right) = \frac{T-K}{T}\sigma^2$$

となり，$E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$ は成り立たないゆえ，$\hat{\sigma}^2$ は σ^2 の不偏推定量ではないことになる。

ところで，σ^2 が誤差項の分散なのだから，その正の平方根 σ は誤差項の標準偏差である。そして，(2.1)を OLS 推定する場合には，σ を S^2 の正の平方根 S で推定するのも，直感的には納

得のいくことであろう。Sは，回帰係数の推定量の標準偏差の推定量である標準誤差と区別して，「『回帰の』標準誤差」と呼ばれる。

さて一般に，$\hat{\theta}$をある母数θのML推定量とするとき，$\hat{\theta}$をある単調関数ϕについて変換した$\phi(\hat{\theta})$は，母数θの関数$\phi(\theta)$のML推定量になっていることが知られている。証明については，中級以上の数理統計学のテキストを参照していただきたい。これによると，σ^2のML推定量である$\hat{\sigma}^2$の正の平方根を取った$\hat{\sigma}$は，σのML推定量であり，したがって一致推定量である。そして(2.2)と(2.3)を見比べれば，KがTより小さい高々有限な数であることから，Sもやはりσの一致推定量であることは直観的に明らかであろう。

しかしS^2がσ^2の不偏推定量である一方で，S^2の正の平方根であるSは，一般にσの不偏推定量ではない。この事実は広く知られていると思われるが，大学院レベルの標準的な計量経済学のテキスト，例えばDavidson and MacKinnon (1993)，Greene (2003) といった文献には，このトピックについての明示的な説明が見当たらない。そこで小稿では次節以降にて，この点についてこれらの計量経済学のテキストの補足を行うべく，Sの確率変数としての特性について述べていきたい。

3. 回帰の標準誤差の分布と期待値

小稿では今後，(2.1)の誤差項ε_tは正規分布に従うことが仮定されているものとする。この仮定のもとでは，ε_tの分散σ^2と(2.2)で定義されるσ^2の不偏推定量S^2から作られる確率変数$(T-K)S^2/\sigma^2$が，自由度$T-K$のカイ2乗分布に従うことが知られている。証明は，大学院レベルの標準的な計量経済学のテキストならたいてい取り上げられているので，そちらを参照していただきたい。

さて，$(T-K)/\sigma^2$は確率変数ではなくある定まった数であるので，S^2の分布はカイ2乗分布を$(T-K)/\sigma^2$の逆数倍した分布になっていることがわかる。すなわち，$V \equiv S^2$，$\delta \equiv \sigma^2/(T-K)$とおき，

$$W \equiv \frac{T-K}{\sigma^2} S^2$$

とおくと，Wは自由度$T-K$のカイ2乗分布に従い，

$$V(\equiv S^2) = \frac{\sigma^2}{T-K}\frac{T-K}{\sigma^2}S^2 = \delta W \tag{3.1}$$

となるが，確率変数Vの確率密度関数を$f_V(v)$とおき，確率変数Wの確率密度関数を$f_W(w)$とおくことにすると，(3.1)は$W=(1/\delta)V$とかきなおせるから，$f_V(v)$は次の確率変数変換の式から求めることができる。

$$f_V(v) = f_W\left(\frac{v}{\delta}\right)\left|\frac{dw}{dv}\right| \tag{3.2}$$

ここで $dw/dv = 1/\delta$ となる。dw/dv を挟んでいる縦棒は絶対値の記号であるが，σ^2は分散だから正であるし，回帰式の推定をするために暗黙のうちに $T > K$ と仮定されているので，結局 δ は正であり，この場合に関しては絶対値の記号は不要である。確率変数変換について詳しくは，数理統計学のテキストか中級以上の計量経済学のテキストを参照していただきたい。W は自由度 $T-K$ のカイ２乗分布に従うので，その確率密度関数 $f_W(w)$ は，$w > 0$のとき

$$f_W(w) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{T-K}{2}} \left\{\Gamma\left(\frac{T-K}{2}\right)\right\}^{-1} w^{\frac{T-K}{2}-1} \exp\left(-\frac{w}{2}\right) \tag{3. 3}$$

であり，$w \leq 0$のとき０である。ただし，(3. 3)右辺の「$\exp(-w/2)$」は，「e」をネピアの数2.7182818 ... とするとき，e の $(-w/2)$ 乗を意味する。また，$\Gamma\{(T-K)/2\}$ は次のガンマ関数である。

$$\Gamma\left(\frac{T-K}{2}\right) = \int_0^{\infty} \tau^{\frac{T-K}{2}-1} \exp(-\tau)\, d\tau$$

(3. 3)と $|dw/dv| = 1/\delta$ を用いて(3. 2)を書き換えると，次のようになる。

$$\begin{aligned} f_V(v) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{T-K}{2}} \left\{\Gamma\left(\frac{T-K}{2}\right)\right\}^{-1} \left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{T-K}{2}-1} v^{\frac{T-K}{2}-1} \exp\left(-\frac{1}{2\delta}v\right)\frac{1}{\delta} \\ &= \left(\frac{1}{2\delta}\right)^{\frac{T-K}{2}} \left\{\Gamma\left(\frac{T-K}{2}\right)\right\}^{-1} v^{\frac{T-K}{2}-1} \exp\left(-\frac{1}{2\delta}v\right) \end{aligned}$$

上式の右辺の δ を $\sigma^2/(T-K)$ に戻せば

$$f_V(v) = \left(\frac{T-K}{2\sigma^2}\right)^{\frac{T-K}{2}} \left\{\Gamma\left(\frac{T-K}{2}\right)\right\}^{-1} v^{\frac{T-K}{2}-1} \exp\left(-\frac{T-K}{2\sigma^2}v\right) \tag{3. 4}$$

となる。

一般に，ある確率変数 X が，$x \leq 0$のとき $f_X(x) = 0$，$x > 0$のとき

$$f_X(x) = \kappa^{-\alpha} \{\Gamma(\alpha)\}^{-1} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x}{\kappa}\right)$$

である確率密度関数 $f_X(x)$ を持つとき，X はパラメータ α，κ のガンマ分布に従うという。ただし，$\alpha > 0$, $\kappa > 0$であり，$\Gamma(\alpha)$ はガンマ関数である。(3. 4)の右辺は，パラメータ $(T-K)/2$，$2\sigma^2/(T-K)$ のガンマ分布の確率密度関数となっている。すなわち，V つまり ε の分散 σ^2の不偏推定量 S^2は，パラメータ $(T-K)/2$，$2\sigma^2/(T-K)$ のガンマ分布に従うことが示されたわけである。なお，このパラメータの順番には意味があり，順番を逆にすれば確率密度関数のグラフの形が変わる。

さて，パラメータ α，κ のガンマ分布に従う確率変数の期待値は，$\alpha \times \kappa$ であることが知られている。この証明については，適当な中級以上の数理統計学のテキストを参照していただきたい。

これによると，パラメータ $(T-K)/2$，$2\sigma^2/(T-K)$ のガンマ分布に従う S^2については，

$$E(S^2) = \frac{(T-K)/2}{(T-K)/2\sigma^2} = \sigma^2$$

となり，このことからも S^2が σ^2の不偏推定量であることが確認できる。

S^2の確率密度関数が求まったことから，S の確率密度関数も求めることができる。$S=\sqrt{V}$ とおいて変数変換を行う。$v=s^2$より，$dv/ds=2s$ となるが，それと変数変換の式より，次の式が求まる。

$$\begin{aligned}
f_S(s) &= 2f_V(s^2)s \\
&= 2\left(\frac{T-K}{2\sigma^2}\right)^{\frac{T-K}{2}}\left\{\Gamma\left(\frac{T-K}{2}\right)\right\}^{-1} s^{2\left(\frac{T-K}{2}-1\right)} \exp\left(-\frac{T-K}{2\sigma^2}s^2\right)s \\
&= 2\left(\frac{T-K}{2\sigma^2}\right)^{\frac{T-K}{2}}\left\{\Gamma\left(\frac{T-K}{2}\right)\right\}^{-1} s^{2\left(\frac{T-K}{2}\right)-1} \exp\left(-\frac{T-K}{2\sigma^2}s^2\right)
\end{aligned}$$

ただし $s>0$である。これが S の確率密度関数である。

一般に，ある確率変数 X が，$x \le 0$のとき $f_X(x)=0$，$x>0$のとき

$$f_X(x) = \kappa^{-\lambda\alpha}\left\{\Gamma(\alpha)\right\}^{-1}\lambda x^{\lambda\alpha-1}\exp\left\{-\left(\frac{x}{\kappa}\right)^{\lambda}\right\}$$

である確率密度関数$f_X(x)$ を持つとき，X はパラメータ α，κ，λ の一般化ガンマ分布に従うという。ただし，$\alpha>0$，$\kappa>0$，$\lambda>0$であり，$\Gamma(\alpha)$ はガンマ関数である。S の確率密度関数は，パラメータ $(T-K)/2, \sqrt{2/(T-K)}\,\sigma, 2$ の一般化ガンマ分布の確率密度関数となっており，それゆえ S は，パラメータ $(T-K)/2, \sqrt{2/(T-K)}\,\sigma, 2$ の一般化ガンマ分布に従っていることになる。

S の確率密度関数が求まれば，S の平均値 $E(S)$ も求めることができる。以下ではそれを導出しよう。上式の $f_S(s)$ を用いた平均値の定義より，

$$\begin{aligned}
E(S) &= \int_{-\infty}^{\infty} s\, f_S(s)ds \\
&= \int_0^{\infty} 2\left(\frac{T-K}{2\sigma^2}\right)^{\frac{T-K}{2}}\left\{\Gamma\left(\frac{T-K}{2}\right)\right\}^{-1} s^{T-K}\exp\left(-\frac{T-K}{2\sigma^2}s^2\right)ds
\end{aligned}$$

となる。ただし，上式の中辺において $-\infty$ であった定積分の下端が，右辺において 0 になっているのは，$f_S(s)$ が $s \le 0$において 0 であることによる。

ここで，ある確率変数 U を $U \equiv S^2$と定義する。$s=\sqrt{u}=u^{1/2}$ より，

$$\frac{ds}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

となるから，上式の右辺は U で変数変換すると，

$$E(S)=2\left(\frac{T-K}{2\sigma^2}\right)^{\frac{T-K}{2}}\left\{\Gamma\left(\frac{T-K}{2}\right)\right\}^{-1}\int_0^{\infty}u^{\frac{T-K}{2}}\exp\left(-\frac{T-K}{2\sigma^2}u\right)\frac{1}{2\sqrt{u}}\,du$$

$$=\left(\frac{T-K}{2\sigma^2}\right)^{\frac{T-K}{2}}\left\{\Gamma\left(\frac{T-K}{2}\right)\right\}^{-1}\int_0^{\infty}u^{\frac{T-K+1}{2}-1}\exp\left(-\frac{T-K}{2\sigma^2}u\right)du$$

とできる。

ここで，ガンマ関数に関する次の公式を紹介する。一般に，ガンマ関数$\Gamma(\xi)$について，次の式が成り立つ。

$$\int_0^{\infty}\tau^{\xi-1}\exp(-\eta\tau)\,d\tau=\Gamma(\xi)\eta^{-\xi} \tag{3.5}$$

ここで，ηは正のパラメータとする。この公式については馴染みがない読者もおられると思うので，証明を与えておく。まず$\mu=\eta\tau$とおく。このとき，$\eta>0$なので，τが0から∞まで変化するとき，μも0から∞まで変化する。また，$d\tau/d\mu=1/\eta$である。これらを用いて(3.5)の左辺を変数変換する。

$$\int_0^{\infty}\tau^{\xi-1}\exp(-\eta\tau)\,d\tau=\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{\eta}\mu\right)^{\xi-1}e^{-\mu}\frac{1}{\eta}d\mu$$

$$=\frac{1}{\eta^{\xi}}\int_0^{\infty}\mu^{\xi-1}e^{-\mu}d\mu$$

このとき，この式の右辺の定積分はガンマ関数の定義から$\Gamma(\xi)$である。よって(3.5)が示された。

さて，(3.5)を，上のUで変数変換された$E(S)$の式の右辺の定積分の部分に適用すると，次のようになる。

$$\int_0^{\infty}u^{\frac{T-K+1}{2}-1}\exp\left(-\frac{T-K}{2\sigma^2}u\right)du=\Gamma\left(\frac{T-K+1}{2}\right)\left(\frac{T-K}{2\sigma^2}\right)^{-\frac{T-K+1}{2}}$$

よって$E(S)$は次のようになる。

$$E(S)=\left(\frac{T-K}{2\sigma^2}\right)^{\frac{T-K}{2}}\left\{\Gamma\left(\frac{T-K}{2}\right)\right\}^{-1}\Gamma\left(\frac{T-K+1}{2}\right)\left(\frac{T-K}{2\sigma^2}\right)^{-\frac{T-K+1}{2}}$$

$$=\left\{\Gamma\left(\frac{T-K}{2}\right)\right\}^{-1}\Gamma\left(\frac{T-K+1}{2}\right)\sqrt{\frac{2}{T-K}}\,\sigma$$

上式右辺のσを除く部分は，一般に1とは限らない。ゆえに，Sはσの不偏推定量ではないことが示された。

なお，パラメータα，κ，λの一般化ガンマ分布に従う確率変数の期待値は，

$$\{\Gamma(\alpha)\}^{-1}\,\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{\lambda}\right)\kappa$$

となることが知られているが，この式の α，κ，λ にそれぞれ $(T-K)/2, \sqrt{2/(T-K)}\,\sigma, 2$ を代入すると，上述の $E(S)$ に一致する。すなわち，上述の $E(S)$ の導出により，一般化ガンマ分布に従う確率変数の期待値の導出についての確認もできたことになる。

4．回帰の標準誤差に不偏性がないことの別証

前節では，回帰の標準誤差 S の確率密度関数を求め，それを用いて回帰の標準誤差の期待値 $E(S)$ を求めた。それを見れば，S が誤差項 u_t の標準偏差 σ の不偏推定量になっていないことは明らかである。

しかしながらその導出には，一般化ガンマ分布の確率密度関数，ガンマ関数に関する公式などが用いられるため，経済・経営・商学系学部の，それも統計・計量経済を専攻しない学生にとって，それほどとりつきやすいものではない。小生は商学部に籍を置いているが，「誤差項の分散 σ^2の不偏推定量 S^2の正の平方根である S は，σ の不偏推定量ではない」ことを講義等で論ずるたび，しばしば「それはなぜか」という質問を受けてきた。時間に余裕があれば，これまでに小稿にて記したことを，必要な予備知識の解説も含めてそのまま述べるであろうが，そのような余裕がない場合に，初等的な統計学しか学んでいない学生にも納得させられそうな簡単な証明を，ここで提案してみたい。

証明は背理法により行う。今，「S は σ の不偏推定量である」，すなわち $E(S)=\sigma$ であるとしよう。このとき，σ はパラメータであるから，

$$\frac{1}{\sigma}E(S)=E\left(\frac{S}{\sigma}\right)=1$$

であり，さらに

$$E\left(\frac{\sqrt{T-K}\,S}{\sigma}\right)=\sqrt{T-K}$$

とならなくてはならない。この両辺を２乗することにより，次の式を得る。

$$\left\{E\left(\frac{\sqrt{T-K}\,S}{\sigma}\right)\right\}^2=T-K \tag{4.1}$$

ところで，小稿３節のはじめに述べたように，確率変数 $(T-K)S^2/\sigma^2$ は，自由度 $T-K$ のカイ２乗分布に従うことが知られている。そして，カイ２乗確率変数の期待値は自由度に一致することも知られている。ゆえに次の式も成り立つ。

$$E\left(\frac{(T-K)S^2}{\sigma^2}\right)=T-K \tag{4.2}$$

(4.1)と(4.2)より，明らかに

$$E\left(\frac{(T-K)S^2}{\sigma^2}\right)-\left\{E\left(\frac{\sqrt{T-K}\,S}{\sigma}\right)\right\}^2=0 \tag{4.3}$$

である。さて一般に，ある連続確率変数を微分可能な単調増加関数で変換したものは，やはり連続確率変数になることが知られている。それを式で記した例が，小稿3節の(3.2)である。正の平方根は，定義域を正の実数に限るなら，微分可能な単調増加関数であるから，自由度 $T-K$ のカイ2乗確率変数である $(T-K)S^2/\sigma^2$ の正の平方根をとった $\sqrt{T-K}\,S/\sigma$ もやはり確率変数である。この確率変数 $\sqrt{T-K}\,S/\sigma$ の分散は，分散を $Var(\bullet)$ と書くことにすると，よく知られた分散と期待値の関係から

$$Var\left(\frac{\sqrt{T-K}\,S}{\sigma}\right)=E\left\{\left(\frac{\sqrt{T-K}\,S}{\sigma}\right)^2\right\}-\left\{E\left(\frac{\sqrt{T-K}\,S}{\sigma}\right)\right\}^2 \tag{4.4}$$

となる。(4.4)の右辺と(4.3)の左辺は明らかに等しいから，$\sqrt{T-K}\,S/\sigma$ の分散は恒等的に0であるということになる。$\sqrt{T-K}\,S/\sigma$ の分散が恒等的に0であることは，$\sqrt{T-K}\,S/\sigma$ が確率変数であることと矛盾する。ゆえに S は σ の不偏推定量でない（証明終わり）。

5．結び

これまで述べてきたように，計量経済学の標準的な大学院レベルのテキストでは，回帰モデルの誤差項 u_t の分散 σ^2 の不偏推定量 S^2 の正の平方根である回帰の標準誤差 S について，その確率密度関数についても期待値についても，詳しい説明を与えているものがほとんど見当たらない。期待値を導出するのでなければ，確率密度関数を紹介する必要もなかろうと判断されているのかもしれない。しかし，S の期待値についてまったく言及しないことは，S^2 が σ^2 の不偏推定量であるがゆえに，「S も σ の不偏推定量」という誤解を招く恐れはあろう。

小稿の目的は，この問題意識のもと，回帰の標準誤差Sについて，大学院レベルの標準的な計量経済学のテキストの説明を補足し，Sが σ の不偏推定量でないことについて注意を喚起することであった。

その目的のため，小稿3節では，S の確率密度関数 $f_S(s)$ を導出し，それを用いて期待値 $E(S)$ を実際に求め，それが σ と等しくないこと，すなわち S が σ の推定量として不偏性を持たないことを示した。

この3節での議論は，経済・経営・商学系統の学生にとってあまりとりつきやすいものではな

かった。そこで，$E(S)$ を実際に求めず，ただ $E(S)$ が σ と一致しないことを示すことにより，S が σ の推定量として不偏性を持たないことをより簡単に証明したのが，４節である。統計・計量経済を専攻していない学生でも知っているような事項のみを用いたと考えているが，いかがなものであろうか。

小稿が，資源配分メカニズム設計に関する実証分析をはじめとする，計量経済学的手法による実証分析の方法論を学ぶ諸氏に参考になれば，幸いである。

参考文献

Davidson, R. and MacKinnon, J. G. (1993) *Estimation and Inference in Econometrics.* Oxford University Press.

Greene, W. H. (2003) *Econometric Analysis.* 5th ed. Prentice-Hall.

蓑谷千凰彦（2003）『統計分布ハンドブック』朝倉書店.

Spanos, A. (1999) *A Probability Theory and Statistical Inference*, Cambridge.

竹村彰通（1991）『現代数理統計学』創文社.