

次世代ネットワークにおける 複数呼種モデルの提案と解析

篠原 瑛

要 旨

情報ネットワークの世界では、インターネットの1993年の日本における商業利用開始を契機に多くのWebサービスが提供されている。ただ、このサービスが広がるにつれ、インターネットの基本精神であるベストイフォートには適さないものが認識されるようになってきた。例えば、金融サービスや決済系サービスについては個別的な保証が求められている。多様化するニーズを踏まえ、個別的にサービスを展開することによりインターネットの技術が進化していき、更に利用しやすい情報ネットワーク社会が構築されることとなる。一方でインターネットの技術の観点では、IPアドレスの枯渇という問題が生じているため、新しいIPアドレスの割り当て方式の導入とともに次世代ネットワーク(NGN)へと変化しようとしている。このNGNにおいてはあらゆるものがインターネットプロトコル(IP)によりまとめられ、管理することができるようになってくるとされている。次世代へ向けた課題としては広がるインターネット空間のなかで、個別具体的にネットワーク品質を求められるようなサービスを導入し、そのサービス品質に満足できるような仕組みを検討することである。また、その仕組みを定量・定性的に分析し性能評価を行うことも同様に求められている。本論文では、複数のサービスを同時に提供するケースについてトラフィック制御方式の定性的・定量的評価を行っている。まず、サービス時間制限付き複数呼種モデルの実質サービス時間分布について確率・統計的な解析を行った。その後、マルコフ過程論による解析及びポアソン到着モデルに対する解法によって同モデルの数理的解析を行った。結果としてモデルに関しては平方変動係数を導出することにより、確率的な挙動の特性を明らかにした。また、ポアソン到着モデルにより導き出された呼損率により、効果を測定した。

キーワード：次世代ネットワーク、情報通信ネットワーク、待ち行列理論、トラフィック制御、輻輳、サービス時間制限方式

A Traffic Analysis of a Multi-Service Class Scheme for Next Generation Network

Ei SHINOHARA

Abstract

Since 1993, when the Internet started to be used commercially, a number of Web services have been provided. However, it has been clear that some services, for example financial and clearing services, do not fit the present online system. Considering people's requests, multi-Internet service classes are needed. Accordingly, Next Generation Network (NGN) settlement has been discussed. In NGN, ubiquitous society appears and a lot of products are controlled by an IP (Internet Protocol) address. This enables the spread of the Internet world more. On the other hand, call traffic sometimes may exceed the system capacity and deteriorate the network performance. This situation is often called network congestion. Network congestion occurs when natural disasters, such as a terribly strong earthquake or a severe storm, occurs and people use their phones to inquire after their relatives' and friends' safety. Network congestion also occurs when many people gather in a downtown area. In order to handle more phone users, a traffic control scheme limiting individual call service time has been provided. Also in NGN, a traffic control scheme and its evaluation method are needed. A stochastic model is presented for this traffic control scheme, a multi-server loss system with a limited service time mechanism, assuming a Poisson process as call arrivals. Moreover, the stochastic model is analyzed to derive the steady-state distribution of customers in the system for the Poisson input case. This model is evaluated by blocking probability.

Key words: Next Generation Network, information network, queueing system, traffic control, network congestion, limited service time

1. まえがき

1993年、日本においてインターネットサービスが商業利用されてから、ビジネスの現場で数多くの Web サービスが提供されるようになった。Yahoo! Japanをはじめとするポータルサイト、オンライングループ管理システム、エアラインチケット購入サイト、ネットバンキングといった既に多くのユーザを有するサービスが実際に存在している。航空券を例にとれば、ペーパーレス化が進み、e チケットが標準利用されている。その一方で、次世代ネットワーク (NGN) サービスを整備する段階がすぐそこまで来ている。携帯電話やパソコンのみならず、多くの電化製品が IP (Internet Protocol) 化され、使い勝手が向上するユビキタス社会が近い将来実現しそうである。ユビキタス社会においては、PC や携帯電話のような情報機器端末の認識がなくともあらゆる身の回りの製品を通して情報ネットワークを活用することとなる。しかし、この情報ネットワークを管理するための IP アドレス数は現在不足している。この再振り分けを行うと共に、現行のサービスを見直すことで NGN をつくりあげようという動きが起こっている。本稿では、商業の将来像を鑑みるに検討不可欠な NGN に焦点をあて、数理モデルを提案し解析することを目指している。

さて、情報通信ネットワークはユーザ間で共用される様々なリソース (例えばサーバ、交換機、ルータ) を基礎として成り立っている。通信トラヒック理論では、通信要求することを呼 (こ) を発する、発呼するという。他のユーザによってリソースが占有されている場合、通信サービス品質 (Quality of Service : QoS) が著しく低下する。地震や台風、山火事といった災害が発生した場合には、被災地に住んでいる親戚や知人、友人の安否確認のため、発呼が平常時と比べて (急に) 増加する。また花火大会や野球のイベント時には特定の場所に集まった人たちがほぼ一斉に (例えばイベント終了時や休憩時間に) 通信するために同様に発呼が増える。これらの場合、サービス提供側はリソースの容量過大を防ぐためにサービス需要者 (=ユーザ) の数を制限する必要がある。この制限は QoS を低下させるだけではなく、ユーザのみならずサービス提供者双方の利益 (=余剰) を低下させる。こうした規制に代わる新たな制御法が NGN に移行するにあたって求められている。なお、本稿でとりあげるサービス時間規制方式の他には、通話→メール推奨方式がある。(Shinohara 2006)

以下、次のような章立てで展開していく。第2節でトラヒックモデルの検討部分とその記法について述べ、第3節でサービス時間規制方式の確率・統計的な解析を行っている。第4節においてはマルコフ過程論とポアソン到着モデルにより解析的にこのモデルの解を導出している。第5節でまとめと今後の課題を述べる。

2. 複数呼種モデルとその理論的背景

本章においては、次章以降で展開するトラヒックモデルの検討範囲とその記述方法について述

べる。普通トラヒックとは主に交通量の意味を有し、情報通信分野では通信要求量のことを通信トラヒックという。これを1章で述べたように、オペレーションズ・リサーチ (Operations Research) もしくはマネジメント・サイエンス (Management Science) のアプローチを活用し分析を行えば確率モデル、特に確率制御問題として帰着される。本稿においては、交通のトラヒックではなく、情報ネットワーク論の世界でも用いられる通信トラヒックに焦点を当てる。

2.1. トラヒックモデルの記法と定常状態

次に、トラヒックモデルの記述方法とサービス順序について述べる。本稿で扱うトラヒックモデルは以下のように特徴付けられる。呼はある確率過程に従って、サービスシステム (系) に到着しランダムな時間長のサービスを要求する。サービスは単一もしくは複数のサーバによって行われる。これを記述するためにはケンドールの記号、 $A/B/c/K/N$ を用いる。ここで、 A は呼の到着過程 (M はポアソン到着分布、 D は一定到着分布)、 B は呼あたりのサービス (M は指数サービス、 H は超指数サービス、 E_r はアーランサービス、 G は一般サービス) 時間分布、 c はサーバ数、 K はシステム容量、 N は呼源数 (発生する呼の数) を表す。一般に K と N は省略してもよいとされており、本稿でも N を省略することとする。

本稿で提案している複数呼種モデルは、 $M/G/c/c$ にあたる。これは、到着過程がポアソン分布に従っており、サービス時間分布は特定の分布に拠らない一般的な分布に相当しており、サービス系が即時式になっているからである。なお、「即時式 (そくじしき)」とは呼がサービス系に到着した場合、直ちにサービスが開始されない場合にその呼が退去してしまう方式のことをいう。具体的な例としては、通話サービスが相当する。一方で、待ち室があり自分よりも先に到着した呼のサービスが終了した場合に引き続いてサービスを受けることができる方式のことを「待時式 (たいじしき)」という。これは、メールサービスに活用されている方式である。

サービス順序は一般的によく用いられるのは先着順サービスである。これは到着順にサービスを受ける方法で、これは FIFO (First In First Out) または FCFS (First Come First Serve) とよばれる。逆に後で到着した客を先にサービスする後着順サービスは LIFO (Last In First Out) または LCFS (Last Come First Serve) とよばれる。客に優先度を付け、それに従いサービスする優先順サービス (Priority Service) もある。

2.2. 複数呼種モデルの提案

本節では、次章以降で解析する複数呼種モデルを導入する。

まず、サービス時間制限方式について定義する。通常、呼は一定のサービス時間を要求してくる。例えば、発信者 A さんが通話をしようとして電話を手を取れば、着信者 B さんに用件を伝え終えるまで話を続けることとなる。これを経営数理的な視点により考察すれば、呼のサービス時間は平均と分散を持っている確率変数と見なすことができるのである。ところで、通信回線 (特に

携帯端末から基地局への無線区間は使用可能数が限られている。もし、使用可能数を超えるサービス要求があれば、要求を満たされず去っていく客が存在することとなる。このような通信回線の混雑状態のことを「輻輳（ふくそう）」とよび、通信事業者（キャリア、例えばNTT DoCoMo や au を提供している KDDI）にとってはこの制御が運営上の課題となっている。この輻輳制御法の一つが「サービス時間制限方式」である。これは、一時的なサービス要求過多を制御するためにサービス時間の上限を設定し、平均を下げることを意図するものである。すでに先行研究では、災害発生時の異常トラヒック制御を目的としたサービス時間制限方式が提案されている（岡田 2000；岡田 2003；高橋他 2006）。しかし、この方式が応用を意図しているのは災害発生時という異常状況に留まっており、「平時」には活用できない。輻輳が発生しそうな繁華街での平日の通勤時間帯にサービス時間制限を一律に掛けることは、ユーザの不満度を考慮した場合にはほぼ導入不可能であろう。

一方で、本稿で提案しているサービス時間規制方式による複数呼種モデルでは、こうした通常の利用へも応用することを意図している。一律にサービスを提供する方向性は今までの情報ネットワークの世界では当然のこととされてきた。情報通信ネットワークの構築は「ベストエフォート」の考え方に依拠したものである。リテールサービスを例にとれば、ADSL や光ファイバーによるインターネットサービスは最大値が示されるだけで実測値と一致することが保証されているわけではない。ただ、この考え方によるサービス展開にそぐわない Web サービスも存在することが明らかになってきた。金融サービス、決済サービス、機密性の高い文書伝達にも Web サービスが活用されているが、保証を求めるこれらのサービスに性質を満たすことは困難である。そのため、次世代におけるネットワーク整備（NGN）においては、多種多様なサービスに合致したクラスを提供できることをサービス要件として満たされる必要がある。

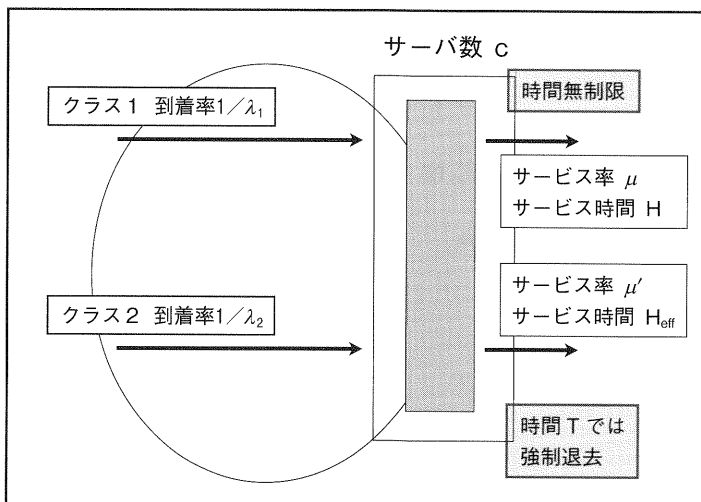
上記のような目的に合致させるため、複数呼種、特に2つのサービスクラスを設定することを検討する。クラス1はサービス時間制限を欠けないこととし、もともとのサービス時間長が保たれる。一方、クラス2は制限時間がついている。すなわち、そのサービス（通信・保留・処理）時間が T に達した呼は強制的にサービス中止となり、系外退去するものとする。

本稿では、以下の表記を用い2呼種モデルを表すこととする。

到着率	クラス1： $1/\lambda_1$	クラス2： $1/\lambda_2$
サービス率	クラス1： μ	クラス2： μ'
サービス時間	クラス1： H	クラス2： H_{eff}
サーバ数	クラス1及び2共用で c	

この表示法を用いると、このモデルの概要は図1のように表される。

図1：サービス時間制限付き2呼種モデル



3. サービス時間制限付き2呼種モデルの実質サービス時間分布

3.1. クラス2（サービス時間規制付きクラス）の実質サービス時間分布

呼のサービス時間（通信時間・処理時間）を H とする。サービス時間 H は、独立で同一な分布に従う確率変数と仮定する。本節では、まずサービス時間制限付きである、クラス2に関して実質サービス時間 H_{eff} の確率・統計的な解析を示す。

クラス2のサービス時間はサービス時間制限 T によって影響を受ける。すなわち、ある呼がサービスを受け始め、 T だけ時間が経つとその時間をサービス時間として、退去させられる。一方で、 T より短い場合には、その呼が受けたサービス時間がそのままサービス時間とされる。よって、式(3-1)のように記述される。

$$\begin{aligned} H_{\text{eff}} &= H && \text{if } H \leq T \\ &= T && \text{if } H > T \end{aligned} \tag{3-1}$$

実質サービス時間 H_{eff} の分布関数は、 T において全ての呼が退去することは、サービス時間が T 以下である確率が1であることを意味するので、

$$\begin{aligned} P(H_{\text{eff}} < t) &= P(H \leq t) && \text{if } t \leq T \\ &= 1 && \text{if } t > T \end{aligned} \tag{3-2}$$

もし元々のサービス時間（通話時間） H が指数分布に従うとすると、

$$P(H \leq t) = 1 - e^{-\mu t} \tag{3-3}$$

このとき、実質サービス時間 H_{eff} の分布関数は、

$$\begin{aligned} P(H_{eff} < t) &= 1 - e^{-\mu T} & \text{if } t \leq T \\ &= 1 & \text{if } t > T \end{aligned} \quad (3-4)$$

次にこの分布関数のラプラス変換 $H_{eff}^*(s)$ を考えると、

$$\begin{aligned} H_{eff}^*(s) &= \int_0^{\infty} e^{-sx} \frac{dP(H_{eff} \leq x)}{dx} dx \\ &= \int_0^T e^{-sx} \mu e^{-\mu x} dx + e^{-(s+\mu)T} \\ &= e^{-(s+\mu)T} + \frac{(1 - e^{-(s+\mu)T})\mu}{s + \mu} \end{aligned} \quad (3-5)$$

なお、平均、2次モーメントをそれぞれ $E(H_{eff})$ 、 $E(H_{eff}^2)$ とおくと、

$$\begin{aligned} E(H_{eff}) &\equiv \frac{1}{\mu'} = \int_0^T t \mu e^{-\mu t} dt + T e^{-\mu T} \\ &= \frac{1 - e^{-\mu T}}{\mu} \end{aligned} \quad (3-6)$$

$$E(H_{eff}^2) = \int_0^T t^2 \mu e^{-\mu t} dt + T^2 e^{-\mu T} = \frac{2(1 - e^{-\mu T} - \mu T e^{-\mu T})}{\mu^2} \quad (3-7)$$

また、分散 $V(H_{eff})$ と平方変動係数 $C(H_{eff})^2$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} V(H_{eff}) &= E(H_{eff}^2) - \{E(H_{eff})\}^2 \\ &= \frac{2(1 - e^{-\mu T} - \mu T e^{-\mu T})}{\mu^2} - \left\{ \frac{1 - e^{-\mu T}}{\mu} \right\}^2 \\ &= \frac{1 - 2\mu T e^{-\mu T} - e^{-2\mu T}}{\mu^2} \end{aligned} \quad (3-8)$$

$$\begin{aligned} C^2(H_{eff}) &= \frac{V(H_{eff})}{E(H_{eff})} \\ &= \frac{1 - 2\mu T e^{-\mu T} - e^{-2\mu T}}{1 - 2e^{-\mu T} + e^{-2\mu T}} \end{aligned} \quad (3-9)$$

上記の平方変動係数 $C^2(H_{eff})$ の解により、元々のサービス時間 (H) が指数分布に従う ($C^2(H) = 1$) ならば、サービス時間規制を設けたときの $C^2(H_{eff})$ は1未満となり、実質サービス時間はもはや指数分布に従っていない。

したがって、トラヒック輻輳時にサービス時間規制方式を採用することはトラヒック平常時にユーザの要求する元々のサービス時間の平均を小さくすることはもちろん、平均のみならず変動

係数をも小さくしている。本方式により、ネットワークトラヒックを輻輳現象の緩和へと繋がるトラヒックに変換していることが分かる。

3.2. サービス時間規制下での2呼種モデルの実質サービス時間分布

クラス1とクラス2それぞれの到着率を λ_1 と λ_2 として2呼種モデルを検討することとする。モデル全体の確率・統計的な挙動をラプラス変換により考えると、

$$\begin{aligned} H_2^* &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} H^*(s) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} H_{eff}^*(s) \\ &= \alpha_1 H^*(s) + \alpha_2 H_{eff}^*(s) \end{aligned} \quad (3-10)$$

となる (なお, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ となる)。

クラス1は指数分布に従うことから、クラス1のサービス時間分布についてラプラス変換を求めれば、

$$\begin{aligned} H^*(s) &\equiv \int_0^{\infty} e^{-sx} \mu e^{-\mu x} dx \\ &= \mu \int_0^{\infty} e^{-(s+\mu)x} dx = \frac{\mu}{s + \mu} \end{aligned} \quad (3-11)$$

またクラス2のサービス時間分布のラプラス変換は、(3-5)及び(3-11)より、

$$\begin{aligned} H_2^* &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} * \frac{\mu}{s + \mu} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} * \left(\frac{s + 2\mu}{s + \mu} e^{-(s+\mu)T} - \frac{\mu}{s + \mu} \right) \\ &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} * \frac{s + 2\mu}{s + \mu} e^{-(s+\mu)T} + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right) * \frac{\mu}{s + \mu} \end{aligned} \quad (3-12)$$

ここで、数値例として $\lambda_1 + \lambda_2 (= 0.5)$ を検討してみることとする。1次モーメントはラプラス変換 H_2^* を s について微分し、 $s=0$ を代入することにより得られるから、

$$E(H_2) = \frac{1}{\mu} - \frac{e^{-\mu T}}{2\mu} \quad (3-13)$$

また2次モーメントもラプラス変換 H_2^* を s について2回微分し、 $s=0$ を代入することにより得られるから、

$$E(H_2^2) = \frac{2}{\mu^2} - \frac{e^{-\mu T}}{\mu^2} - \frac{e^{-\mu T} T}{\mu} \quad (3-14)$$

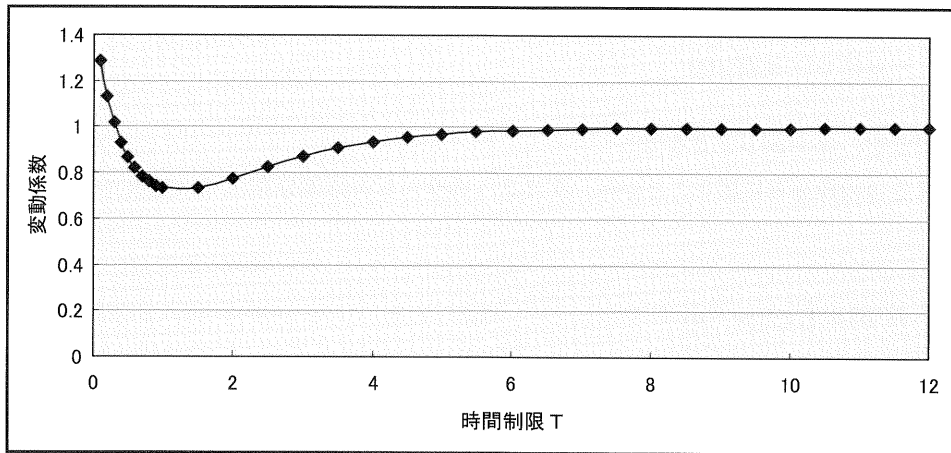
平方変動係数を求めると、

$$C(H_2)^2 = \frac{\left(\frac{1}{\mu^2} - \frac{e^{-2\mu T}}{4\mu^2} - \frac{e^{-\mu T} T}{\mu} \right)}{\left(\frac{1}{\mu} - \frac{e^{-\mu T}}{2} \right)} \quad (3-15)$$

となる。

時間制限 T と平方変動係数の関係をグラフで表すと以下のようになる。

図2：複数呼種モデルにおける平方変動係数



T を十分大きくすると指数分布に従っていることが確認されるが（平方変動係数が 1 となることから）、短い時間で制限が掛けられた場合にはもはや指数分布に従っていない。特に、 $0.4 < T < 6$ 程度の範囲では 1 を十分下回っており、平均サービス時間のみならず全体の変動自体も小さくなっていることが分かる。

4. サービス時間規制付き 2 呼種モデルのトラヒック解析

サービス時間規制方式はトラヒックモデル化するとサービス時間制限モデルである。ある呼のサービス時間が T に達したならば、強制的にこの種のサービスが中止し、その呼は系外に退去するものとする。本節以降、呼は複数サーバ即時式で処理されると仮定する。すなわち、 c 個全てのサーバがビジー（稼動中）のときに到着した呼は系に入れず呼損となる。（サービスを受けられずに去ることとなる）本稿では、再呼（呼損となった呼が再び到着列に並ぶこと）を考慮しない。すなわち、呼損となった呼はサービス要求を諦め、系から永遠に退去する。

また、本稿ではクラス 2 のみにサービス時間規制を設けることとしており、クラス 1 として到着した呼にはサービス時間規制は適用されない。

4. 1. マルコフ過程論による解析

前章までで提案したサービス時間制限付き2呼種モデルは、到着呼の到着時間間隔やサービス時間が指数分布に従うため、無記憶 (memory-less) であり、マルコフ (Markov) となる。(Allen (1990) 参照) より厳密に言えば、状態空間 S を持つ2次元確率過程 $\{(C(t), N(t); t \geq 0)\}$ は時間斉時的マルコフ過程 (time-homogeneous Markov process) となる。マルコフ過程の確率的挙動を完全に特徴付ける無限小生成作用素 (infinitesimal generator) \mathbf{Q} を微小区間の推移を観察することにより求めることとする。

まず、 $0 \leq i < c$, $0 \leq j < c$ に対し、呼が到着すると直ちにサービスされるため、

$$[Q]_{(i,j),(n,m)} \equiv q_{(i,j),(n,m)} = \begin{cases} \lambda_1 & \text{if } (n,m) = (i+1,j); \\ \lambda_2 & \text{if } (n,m) = (i,j+1); \\ j\mu' & \text{if } (n,m) = (i+1,j-1); \\ i\mu & \text{if } (n,m) = (i-1,j); \\ -(\lambda_1 + \lambda_2 + i\mu + j\mu') & \text{if } (n,m) = (i,j); \text{ (対角成分)} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4-1)$$

次に、 $i = c$, $0 \leq j < c$ (クラス1呼によりサーバビジー) に対し、

$$[Q]_{(i,j),(n,m)} \equiv q_{(i,j),(n,m)} = \begin{cases} \lambda_2 & \text{if } (n,m) = (c,j+1); \\ i\mu & \text{if } (n,m) = (i-1,j); \\ -(\lambda_2 + i\mu) & \text{if } (n,m) = (i,j); \text{ (対角成分)} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4-2)$$

最後に $0 \leq i < c$, $j = c$ (クラス2呼によりサーバビジー) に対し、

$$[Q]_{(i,j),(n,m)} \equiv q_{(i,j),(n,m)} = \begin{cases} \lambda_1 & \text{if } (n,m) = (i+1,c); \\ j\mu' & \text{if } (n,m) = (i-1,c); \\ -(\lambda_1 + j\mu') & \text{if } (n,m) = (i,j); \text{ (対角成分)} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4-3)$$

以上で、2次元マルコフ過程 $\{(C(t), N(t); t \geq 0)\}$ の無限小生成作用素 \mathbf{Q} が求められた。作用素 \mathbf{Q} は、 $(c+1) \cdot (c+1)$ 次正方形行列である。遷移率行列関数を $\mathbf{P}(t)$ とする。関数 $\mathbf{P}(t)$ も $(c+1) \cdot (c+1)$ 次正方形行列であり、その第 $(k, 1)$ (i, j) 成分は次式で定義される。

$$[P(t)]_{(k,1)(i,j)} = P\{(C(t), N(t)) = (i, j) | (C(0), N(0)) = (k, 1)\} \quad ((k, 1), (i, j) \in S) \quad (4-4)$$

ここで、 $P[A|B]$ は事象 B が起こったもとでの事象 A が起こる条件付確率を表す。マルコフ過程 $\{(C(t), N(t); t \geq 0)\}$ のチャップマン・コルモゴロフによる前進・後進方程式 (C-K 方程式)

は次式となる。

$$(d/dt)P(t) = P(t)Q = QP(t) \quad (4-5)$$

ここで $(d/dt)P(t)$ は遷移率各行列関数各要素の時間微分から構成される行列を表わす。

初期条件は次式で表わされる。

$$P(0) = I, \quad (d/dt)P(t)|_{t=0} = Q \quad (4-6)$$

ここで I は恒等行列を表わす。遷移率行列関数 $P(t)$ は初期条件 (4-6) のもとで C-K 方程式を解くことにより得られ、

$$P(t) = \exp[Qt] \quad (4-7)$$

よって、遷移率行列関数 $P(t)$ は無限小生成作用素 Q により完全に決定される。

さて、次の2つの条件が満たされるとき、マルコフ過程 $\{(C(t), N(t); t \geq 0)\}$ の定常状態または平衡状態という。

条件 i) 遷移率行列関数 $P(t)$ の各成分に対し、極限值

$$\pi_{i,j} = \lim_{t \rightarrow \infty} P[(C(t), N(t) = (i, j)) | (C(0), N(0) = (k, 1))] \quad ((k, 1), (i, j) \in S) \quad (4-8)$$

が存在し、初期状態 $(k, 1)$ と独立である。

条件 ii) 正規化条件式

$$\sum_{i,j} \pi_{i,j} = 1 \quad (4-9)$$

が成り立つ。ここで、 $\sum_{i,j}$ は全ての状態空間 S に亘って和を取ることを意味する。

4.2. 定常状態解析

以下、定常状態の存在を仮定する。定常状態確率ベクトルを π とおく。ベクトル π の次元は $(c+1)(c+1)$ である。C-K 方程式において $t \rightarrow \infty$ とする。推移率関数の時間微分 $(d/dt)P(t)$ の各要素は定常状態においては零となるため、 $(d/dt)P(t)$ は零行列に収束し、推移率関数 $P(t)$ の各行は前節の条件 i) から π に収束する。したがって、次の平衡状態方程式

$$\pi \cdot Q = 0 \quad (4-10)$$

を得る。正規化条件式は次のように表現される。

$$\pi \cdot e^T = 1 \quad (4-11)$$

ここで、全ての成分が1であるような $(c+1)(c+1)$ 次元行ベクトルを e とし、

$$e = (1, 1, 1, \dots, 1)$$

とし、上付きの T は転置行列であることを意味している。

$(c+1)(c+1)$ 個の平衡状態方程式だけでは、 $(c+1)(c+1)$ 次元の π が求まらない (Q に逆行列が存在しないため)。しかしながら、平衡状態方程式の1行を正規化条件式と置き換えれば、 π を求めるのに必要な逆行列が存在する。したがって、この置き換えにより、定常状態確率ベクトル π に対する連立一次方程式を解いて、定常状態確率分布が形式解としても数値的に求められる。

4.3. ポアソン到着モデルに対する解法

系外からの呼の到着過程はポアソン過程にしたがうと仮定し、単位時間における到着呼数をクラス1は λ_1 、クラス2は λ_2 (すなわち $1/\lambda_1$ と $1/\lambda_2$ はそれぞれ到着率) とする。ここで、系 (システム) とは c 個並列にあるサーバからなるものとする。系におけるサーバはそれぞれ独立に個々の呼を処理する。各呼に対するサービス (= 通話・保留・処理) 時間の確率・統計的な挙動は第3節で述べた。

ポアソン入力即時式 $M/G/c/c$ モデルにおける定常状態確率分布 $\{\pi_i : i = 0, 1, 2, \dots, c\}$ は各状態において次のフローバランスを満たすことが知られている。

$$\begin{aligned} \lambda \pi_i &= (i+1) \mu \pi_{i+1} \\ (i &= 0, 1, 2, \dots, c) \end{aligned} \tag{4-12}$$

これを拡張させ、2呼種モデルに適応させフローバランスを記述すると、

$$\begin{aligned} (\lambda_1 + \lambda_2 + i\mu + j\mu') \pi_{i,j} &= (i+1) \mu \pi_{i+1,j} + (j+1) \mu' \pi_{i,j+1} + \lambda_1 \pi_{i-1,j} + \lambda_2 \pi_{i,j-1} \\ (0 \leq i < c, \quad 0 \leq j < c) \end{aligned} \tag{4-13}$$

$$\begin{aligned} (\lambda_2 + c\mu + j\mu') \pi_{c,j} &= (j+1) \mu' \pi_{c,j+1} + \lambda_1 \pi_{c-1,j} + \lambda_2 \pi_{c,j-1} \\ (i = 0 \quad 0 \leq j < c) \end{aligned} \tag{4-14}$$

$$\begin{aligned} (\lambda_2 + i\mu + c\mu') \pi_{i,c} &= (i+1) \mu \pi_{i+1,c} + \lambda_1 \pi_{i-1,c} + \lambda_2 \pi_{i,c-1} \\ (0 \leq i < c \quad j = c) \end{aligned} \tag{4-15}$$

ここで、 $\pi_{i,j}$ は定常状態における系内呼数のうちクラス1に i 個、クラス2に j 個ある確率を示す。上式の左辺は、クラス1が状態 i から状態 $i+1$ に、クラス2が状態 j から状態 $j+1$ にフローアップする速度を表す。右辺はクラス1が状態 $i+1$ から状態 i に、クラス2が状態 $j+1$ から状態 j

にフローダウンする確率を表す。また、このフローバランス式はサービス時間が指数分布でないときも即時式であるならば成り立っている。

上記3式より、定常状態確率分布 $\{\pi_{i,j} : i=0, 1, 2, \dots, c \quad j=0, 1, 2, \dots, c \quad i+j \leq c\}$ は漸化的に解けて（途中式は付録に付す）

$$\pi_{i,j} \equiv \frac{\left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^i}{i!} \cdot \frac{\left(\frac{\lambda_2}{\mu'}\right)^j}{j!} \pi_{0,0} \quad (i+j \leq c) \quad (4-16)$$

$$\pi_{i,j} \equiv 0 \quad (i+j > c)$$

系が空きの確率（system idle probability） $\pi_{0,0}$ は正規化条件：

$$\sum_{i=0}^c \sum_{j=0}^c \pi_{i,j} = 1 \quad (4-17)$$

から求められる。

$$\pi_{0,0} = \frac{1}{\sum_{i=0}^c \sum_{j=0}^c \frac{\left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^i}{i!} \frac{\left(\frac{\lambda_2}{\mu'}\right)^j}{j!}} \quad (4-18)$$

$(i+j \leq c)$

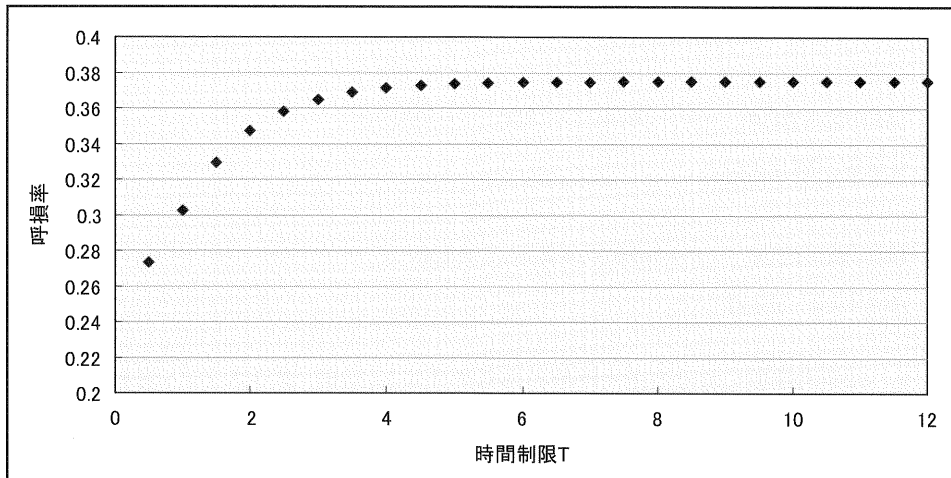
また、呼損率 P_{loss} はサーバがビジー（全て稼動中）である確率を示すことから、

$$P_{loss} = \sum_{i+j=c} \pi_{i,j} \quad (4-19)$$

$(= \pi_{0,c} + \pi_{1,c-1} + \dots + \pi_{c,0})$

と求めることができる。

図3：複数呼種モデルの呼損率



呼損率の特性をクラス1及びクラス2の到着率 (λ_1, λ_2) を5, サービス率 $\mu=1$, サーバ数 $c=3$ の場合について表すと以下ようになる。

5. まとめと今後への課題

本稿では、次世代ネットワーク整備への応用を意識した複数呼種モデルの提案と解析を行った。従来、サービス時間制限方式は応用範囲が限られてきたが、この方式により可能となるトラフィック制御を生かしつつも多様なサービス要求に耐えられるよう改良を加えた。解析部分においては、マルコフ過程論を駆使し、マルコフ過程の無限小生成作用素並びに遷移率関数を求めた。さらに、呼損率を求めることによりモデルの効果を測定しやすい積形式の解をポアソン到着モデルにより導出している。

今後、残された課題としては、到着時間分布やサービス時間分布を一般化することが挙げられる。特にサービス時間分布については、時間制限を掛けない場合 ($T = \infty$) には指数分布に従うと仮定して解析を行った。元々の分布を指数分布となることから、サービス時間に制限を加えた。しかし、この複数呼種モデルを例えばクラス1を高い料金クラス、クラス2を低い料金クラスへ当てはめる応用を行えば、この仮定は指数分布という条件を外し一般化すべきだと思われる。すなわち、低料金の客にもし時間制限ぎりぎりまで使用しようというインセンティブが働けば、サービス時間分布が大きく変化することが予想されるからである。

もう一つは、不満度を経営科学的な手法により解析をすることである。すなわち、クラス2で自らのサービス時間長が制限時間 T を越えていたために、強制的に退去してしまった客やそもそも系に入れなかった呼損客の不満度を含めたモデル構築を行えば、さらに応用可能な範囲が広がっていくものと思われる。不満度の解析には、AHP (Analytic Hierarchy Process) とよばれる意思決定法が知られている。この手法を用い定量的に捉えることが課題として残されている。

参考文献

- A. O. Allen (1990). *Probability, Statistics, and Queueing Theory with Computer Science Applications*. Academic Press.
- A. Takahashi, Y. Takahashi, S. Kaneda, Y. Akinaga, and N. Shinagawa (2005). The robustness of blocking probability in a loss system with repeated customers. *Proc. of 2nd Intl Conf. on E-commerce and Telecommun. Netw.*, Vol. II: pp.60-65.
- E. Gelenbe and I. Mitrani (1980). *Analysis and Synthesis of Computer Systems*. Academic Press.
- E. Shinohara, Y. Takahashi, S. Kaneda, Y. Akinaga, and N. Shinagawa (2006). A mixed loss and delay model for mobile communication system. *INFORMS Telecommun. Conf.*, A2 Dallas, Texas, March30-April 1.
- F. Baccelli and P. Bremaud (1994). *Elements of Queueing Theory, Palm Martingale Calculus and Stochastic Recurrences*. Springer-Verlag.
- L. Kleinrock (1975). *Queueing Systems Vol. I: Theory*. A Wiley-Interscience Publication.
- 岡田和則 (2000). 「災害時等における携帯電話の通信時間規制の検討」『信学技報』, RCS2000-103 : 81-86.
- 岡田和則 (2003). 「大規模災害時等における重要通信確保のための通信時間規制の提案」『信学技報』, CQ2003-26 : 13-86.

- 岡田和則 (2005). 「災害時における携帯電話の通信時間規制 (情報セキュリティ特集) — (安全・安心のためのネットワーク技術)」『情報通信研究機構季報』, Vol.51, No.1・2 (2005/3・6): 273-282.
- 川島幸之助, 町原文明, 高橋敬隆, 齊藤洋 (電子情報通信学会編) (1995). 『通信トラヒック理論とマルチメディア通信網』 コロナ社.
- 高橋敬隆 (2004). 「再呼のある状態依存入力トラヒックモデル: 確率解析と情報ネットワークへの応用」.
- 高橋敬隆, 紀一誠 (1998). 「補助変数法と積形式解」『オペレーションズ・リサーチ』 vol.43, no.10: pp.562-567.
- 高橋敬隆, 四方義昭, 岡田和則, 小松尚久 (2006). 「携帯電話システムにおける保留時間規制方式のトラヒック解析—サービス時間制限のある即時式モデル—」『信学技報』 IN2006-14: pp.79-84.
- 渡辺達也, 岡田和則, 小松尚久, 高橋敬隆 (2004). 「大規模災害時における被災地呼優先受付制御の一検討」『電子情報通信学会 全国大会予稿』 B11-34.

参考 URL

ソフトバンクモバイル株式会社ご利用料金案内ページ (ゴールドプランについて)

http://mb.softbank.jp/mb/price_plan/3G/gold_plan/index.html

最終アクセス2007年8月8日

株式会社ウィルコム ウィルコム定額プラン案内ページ

http://www.willcom-inc.com/ja/plan/new_flatrate/index.html?ref=swf

最終アクセス2007年8月8日

付録) 定常状態確率分布の導出

1) $0 \leq i < c$ $0 \leq j < c$ の場合

$$\begin{aligned}
 & (\lambda_1 + \lambda_2 + i\mu + j\mu')\pi_{i,j} = (i+1)\mu\pi_{i+1,j} + (j+1)\mu'\pi_{i,j+1} + \lambda_1\pi_{i-1,j} + \lambda_2\pi_{i,j-1} \\
 \text{右辺} &= (i+1)\mu \frac{\left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^{i+1} \left(\frac{\lambda_2}{\mu'}\right)^j}{(i+1)! j!} \pi_{0,0} + (j+1)\mu' \frac{\left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^i \left(\frac{\lambda_2}{\mu'}\right)^{j+1}}{i! (j+1)!} \pi_{0,0} \\
 &+ \lambda_1 \frac{\left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^{i-1} \left(\frac{\lambda_2}{\mu'}\right)^j}{(i-1)! j!} \pi_{0,0} + \lambda_2 \frac{\left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^i \left(\frac{\lambda_2}{\mu'}\right)^{j-1}}{i! (j-1)!} \pi_{0,0} \\
 &= (i+1)\mu \frac{\left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^i \left(\frac{\lambda_2}{\mu'}\right)^j}{i+1 i! j!} \pi_{0,0} + (j+1)\mu' \frac{\left(\frac{\lambda_2}{\mu'}\right) \left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^i \left(\frac{\lambda_2}{\mu'}\right)^j}{j+1 i! j!} \pi_{0,0} \\
 &+ \lambda_1 i \left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^{-1} \frac{\left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^i \left(\frac{\lambda_2}{\mu'}\right)^j}{i! j!} \pi_{0,0} + \lambda_2 j \left(\frac{\lambda_2}{\mu'}\right)^{-1} \frac{\left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^i \left(\frac{\lambda_2}{\mu'}\right)^j}{i! j!} \pi_{0,0} \\
 &= (\lambda_1 + \lambda_2 + i\mu + j\mu') \frac{\left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^i \left(\frac{\lambda_2}{\mu'}\right)^j}{i! j!} \pi_{0,0} \\
 &= (\lambda_1 + \lambda_2 + i\mu + j\mu')\pi_{i,j} \\
 &= \text{左辺}
 \end{aligned}$$

2) $i = c$ $0 \leq j < c$ の場合

$$(\lambda_2 + i\mu + j\mu')\pi_{c,j} = (j+1)\mu'\pi_{c,j+1} + \lambda_1\pi_{c-1,j} + \lambda_2\pi_{c,j-1}$$

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= (j+1)\mu' \frac{\left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^c \left(\frac{\lambda_2}{\mu'}\right)^{j+1}}{c! (j+1)!} \pi_{0,0} + \lambda_1 \frac{\left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^{c-1} \left(\frac{\lambda_2}{\mu'}\right)^j}{(c-1)! j!} \pi_{0,0} + \lambda_2 \frac{\left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^c \left(\frac{\lambda_2}{\mu'}\right)^{j-1}}{c! (j-1)!} \pi_{0,0} \\ &= \left\{ (j+1)\mu' \frac{\left(\frac{\lambda_2}{\mu'}\right) \left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^c \left(\frac{\lambda_2}{\mu'}\right)^j}{j+1 c! j!} + \lambda_1 i \left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^{-1} \frac{\left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^c \left(\frac{\lambda_2}{\mu'}\right)^j}{c! j!} + \lambda_2 j \left(\frac{\lambda_2}{\mu'}\right)^{-1} \frac{\left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^i \left(\frac{\lambda_2}{\mu'}\right)^j}{i! j!} \right\} \pi_{0,0} \\ &= (\lambda_2 + c\mu + j\mu') \frac{\left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^c \left(\frac{\lambda_2}{\mu'}\right)^j}{c! j!} \pi_{0,0} \\ &= (\lambda_2 + c\mu + j\mu')\pi_{i,j} \\ &= \text{左辺} \end{aligned}$$

3) $0 \leq i < c$ $j = c$ の場合

$$(\lambda_1 + i\mu + c\mu')\pi_{i,c} = (i+1)\mu\pi_{i,c+1} + \lambda_1\pi_{i-1,c} + \lambda_2\pi_{i,c-1}$$

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= (i+1)\mu' \frac{\left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^i \left(\frac{\lambda_2}{\mu'}\right)^{c+1}}{i! (c+1)!} \pi_{0,0} + \lambda_1 \frac{\left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^{i-1} \left(\frac{\lambda_2}{\mu'}\right)^c}{(i-1)! c!} \pi_{0,0} + \lambda_2 \frac{\left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^i \left(\frac{\lambda_2}{\mu'}\right)^{c-1}}{i! (c-1)!} \pi_{0,0} \\ &= \left\{ (i+1)\mu' \frac{\left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^i \left(\frac{\lambda_2}{\mu'}\right)^c}{i+1 i! c!} + \lambda_1 i \left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^{-1} \frac{\left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^i \left(\frac{\lambda_2}{\mu'}\right)^c}{i! c!} + \lambda_2 j \left(\frac{\lambda_2}{\mu'}\right)^{-1} \frac{\left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^i \left(\frac{\lambda_2}{\mu'}\right)^c}{i! c!} \right\} \pi_{0,0} \\ &= (\lambda_1 + i\mu + c\mu') \frac{\left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^i \left(\frac{\lambda_2}{\mu'}\right)^c}{i! c!} \pi_{0,0} \\ &= (\lambda_1 + i\mu + c\mu')\pi_{i,j} \\ &= \text{左辺} \end{aligned}$$