廃棄物経済モデルとCES関数

On the Use of CES Function in the Economic Model of Waste Recycling

中村愼一郎
早稲田大学政治経済学部
nakashin@waseda.jp *

初版 2003年2月13日 改訂 同年9月28日

1 はじめに

1961年に4人の経済学者が提案したCES (Constant Elasticity of Subsititution) 関数 [1] は，昨今，環境関連の応用一般均衡モデル (CGE) での利用を通じ，経済学以外の分野においても多く用いられている。特に，CGEモデルにおける生産関数 (投入-産出関係) の特定化には専らCES関数が用いられている。

環境や廃棄物に関わる変数は物理量 (physical quantity) であるから，その分析においては物質・エネルギー収支を適切に考慮することが極めて重要である。これに対し経済学は主に貨幣表示の変数を分析対象としてきたので，金額表示の収支には注意を払うが，物質・エネルギー収支には特に注意を払ってこなかった[1]。ちなみに，経済学における生産関数概念において，投入と産出の間の物質収支は先験的な制約条件として考慮されていない。特に，そのパラメトリックな特定化の代表格であるCES生産関数やそれを一般化したトランスログ関数などの伸縮型生産関数においてこの傾向は顕著である。しかし，対象とする環境や廃棄物分析において保存則の考慮が本質的である限りにおいて，これを考慮していない生産関数概念を安易に応用するのは分析対象の本質を見誤るおそれがある。

数年前，日本国政府は大型研究プロジェクトであるミレニアム・プロジェクト [2] を立ち上げた。その中の「循環型経済社会構築のための調査研究」[3] における研究成果が公刊されている [4]。この研究では廃棄物リサイクルの経済分析を行うためにCES関数が使われているが，物質収支をはじめとしたいくつかの点で疑問点があるように思われる。本小論では，この疑問点を中心に，筆者が廃棄物経済分析において留意すべきと考えている点を述べる。

*改訂に際し，増井利彦氏 (国立環境研究所) から初版について貴重なコメントを頂いた。近藤康之氏 (早稲田大学) と加河茂美氏 (国立環境研究所 当時) からは初版作成において貴重なコメントを頂いた。ここに深く感謝する。しかしながら，本稿の内容に関する一切の責任は筆者にある。

[1] 経済分析においても価格と数量の区別は重視される。しかし，多くの場合に数量は指数化された実質額であり，物理的な数量には必ずしも対応していない。

2 生産関数:経済学における技術の表現

2.1 生産関数とは

廃棄物リサイクルを考える場合，回収された廃棄物が資源としてどの程度需要されるのかは，それが処女資源をいかほど代替しうるかに依存して決まる。従って，所与の生産活動における廃棄物を起源とする投入物と処女投入財との間の代替関係を把握することは極めて重要である。製紙における古紙パルプと処女パルプ，高炉還元剤としての廃プラスチックとコークスなどがこの代替関係の典型的な例である。

所与の生産活動における投入物間の代替関係を表すために経済学者が用いる概念が「生産関数」である。今，よく定義された一種類の財を生産するために，これもよく定義された n 種類の投入が必要であるとし，所与の期間における利用可能な後者の投入量を $x_1, \cdots, x_n$ とする。更に，この投入量の下で実現可能な最大生産量を y とすると，生産関数 f は

$$y = f(x_1, \cdots, x_n) \tag{1}$$

で与えられる。この関数について経済理論が想定する先験的な条件は次の二つである

桃源郷の否定 全ての投入がゼロなら生産もゼロ:関数 f は原点を通る

単調性 投入を増やすと生産は減らない:関数 f は増加関数。

経済モデルにおいて CES 関数が使われるのは，専ら，投入価格の変化のよる投入間の代替効果を分析するためである。これは [4][5][6][7] についても然りである。この目的のためには，上記 2 点に加えて

凸性 f は準凹である: 所与の y を生産することが出来る x_1 と x_2 から構成される集合が原点に対して凸である

が必要である。

所与の y を生産するために n 種類の投入をどのように組み合わせるべきかは生産関数 f の形状によって決まる。これを簡単に示すために投入の種類が二つである単純な場合 $(n = 2)$ を考える。f の形状として最も簡単なのは次の線形式である

$$y = b_1 x_1 + b_2 x_2 \tag{2}$$

ここで b_1, b_2 は少なくともどちらかが正値を取る非負のパラメータである。この場合，2 種類の投入は完全に代替可能である。経済学では代替が可能である程度を代替弾性値 σ で表す。上の凸条件から $\sigma \geq 0$ である ([8], p.87)[2]。完全代替の場合，$\sigma = \infty$ となる。

完全代替の対極は一切の代替可能性が排除される完全補完 $(\sigma = 0)$ である。この場合，全ての投入量は正値でなければ成らず，投入原単位 $a_i > 0$ で換算して量がもっとも少ない投入の水準によって生産量が決まる:

$$y = \min\left\{\frac{x_1}{a_1}, \frac{x_2}{a_2}\right\} \tag{3}$$

今，y が与えられているとすると，それを生産するために必要な投入は

$$x_1 = a_1 y, \quad x_2 = a_2 y \tag{4}$$

で与えられる。これは産業連関分析における固定投入係数に他ならない。

[2] 弱凸性とし $\sigma = 0$ の場合も含める。

2.2 CES 関数

上の二つの定式化は 2 種類の投入間での代替について両極端の場合を与える。両者を含む"一般的"な特定化として経済学者が 40 年ほど前に考案したのが以下の CES(固定代替弾力性) 生産関数である。

$$y = A\left[\alpha_1\, x_1^{-\rho} + \alpha_2\, x_2^{-\rho}\right]^{-1/\rho}, \quad \alpha_1,\, \alpha_2 \in (0,1) \tag{5}$$

ここで A は効率を表すパラメータである。代替の程度は ρ の大きさによって決まる。例えば，$\rho = -1$ の時，この関数は (2) となる。このことから類推できるように ρ と σ の間には次の関係がある

$$\sigma = \frac{1}{1+\rho} \tag{6}$$

凸条件 $\sigma \geq 0$ から $\rho \in [-1,\infty]$ である。(3) は完全補完 $\sigma = 0$ なので，これは $\rho = \infty$ の場合に対応する[3]。

$\rho \in (0,\infty]$ の時 (代替弾性では $\sigma \in [0,1)$ の時) 所与の $K := (y/A)^{-\rho}$ について

$$K = \alpha_1\, x_1^{-\rho} + \alpha_2\, x_2^{-\rho}$$

から，$x_1 \to 0$ ならば $\alpha\, x_1^{-\rho} \to \infty$ となる。しかし，$\alpha\, x_1^{-\rho}$ には上限 K があるので，x_1 はゼロにならない。同様の理由で x_2 もゼロにならない。すなわち，一方の投入をいくら大きくしても他方の投入をゼロとすることは出来ないのである。$\rho = 0$ の場合，対数線形の Cobb-Dougals 関数を得る ([8], p.87)。この場合も，正の産出を得るためには，すべての投入が正でなくては成らない。

これに対し，$\rho \in (-1,0)$ の場合 (代替弾性では $\sigma \in (1,\infty)$ の場合) には，$x_1 = 0$ ならば $x_2 = [K/(1-\alpha)]^{-\rho}$，$x_2 = 0$ ならば $x_1 = [K/\alpha]^{-\rho}$ となるので，一方の投入が十分にあれば他方の投入はゼロにすることが出来る。

2.3 CES 関数の課題

CES 関数は 40 年以上広く経済学で使用され，昨今では CGE (応用一般均衡モデル) における利用を通じて復活が著しい。しかし，この関数は以下の基本的な問題を持っている

- 投入が 3 種類以上の場合への応用が，全投入について等しい代替弾性値が仮定されるため非現実的である
- 代替弾性値が未知である

一番目の問題に対処する方策として CGE モデルでは多くの投入について先験的に分離可能性を仮定する。これは n 種類の投入がある時，それをいくつかの組に分け，異なる組の間における構成要素の変動は互いに独立であるとする物である。例えば，国立環境研究所を中心とする温暖化研究グループが 1999 年に発表した CGE(AIM の一部を構成する副モ

[3] 厳密には完全補完の場合 $\sigma = 0$ は $\rho \to \infty$ の極限に対応するが，既存文献における慣例に従って $\rho = \infty$ と書いた．既述の完全代替の場合 $\rho = -1$ も同様に $\sigma \to \infty$ の極限に対応するが，$\sigma = \infty$ と書いた．後述の $\sigma = 1,\, \rho = 0$ の場合も同様である．

デル) に関する研究 [5] では，末尾にある同論文からの引用図 (Figure 2) にあるようにエネルギー投入と資本・労働が分離可能であるとしている。エネルギー構成を変更するにはボイラーなどの資本構成も変更が必要なのであるが，分離可能の下では前者は後者と独立に変更可能と言うことになる。これを要するに，代替弾性値を等しいとする非現実的な仮定を回避するために分離可能性という等しく強い仮定を用いているのである[4]。なお，これと類似した点は CGE モデルの国際的組織である GTAP の報告書 [6], 中央環境審議会地球環境部会「目標達成シナリオ小委員会」のモデル分析報告書 [7] においても見いだすことが出来る。

2 番目の問題は CES 関数に限ったことではなく，経済学全般に当て嵌まることである。経済学のモデルは数学的な装いを持っているが，そこに登場するパラメータは一般に未知である。すなわち，理論モデルそれ自体の数量的な含意は限りなくゼロに等しいのである。統計資料からの未知パラメータ推定が計量経済学に期待されるのであるが，その 1950 年以来の進展が学問として共有しうる経験的知見の蓄積にいかほど貢献したかは甚だ疑わしい。実際，その度に一からパラメータを推定するのが経済学実証分析の実態であるといっても過言ではない。

3 廃棄物リサイクルモデルの落とし穴

3.1 生産関数と物質収支

廃棄物は物質であるので物質保存則に従う。そもそも生産過程において欲されない廃棄物が発生するのは，投入がすべて欲される生産物には変換されないからである。生産関数 (1) は投入の歩留まりが 100%であり，従って生産過程では廃棄物が発生しない場合に対応する。その場合，素材投入量の合計は生産量に等しくなるはずである。

今，2 種類の素材を用いているとすると，投入と産出の間で物質保存則が成立するのは $\sigma \to \infty$ である完全代替 (2) か $\sigma = 0$ である完全補完 (3) の場合のみである。前者では自明である。後者の場合には (3) を満たす x_1, x_2, y のある組み合わせについて

$$\text{総投入量} := x_1 + x_2 = (a_1 + a_2)\, y = \text{単位換算した生産量} \tag{7}$$

が成立することを見ればよい。

3.2 清水・菅のリサイクル CES モデル

清水・菅等 [4] は CES 関数 (5) を用いてガラス瓶と鉄のリサイクルについて経済分析を行っている。特に，ガラス瓶の生産関数として x_1 をソーダ灰，けい砂，石灰などの処女素材投入量，x_2 を廃棄物起源のカレットとする CES 関数が用いられている ([4] 所収斉藤論文 p.95)。ガラス瓶の生産には他の投入も必要であるが，2 種類の素材に限定しているのは上で述べた分離可能性を仮定しているからである。

---

[4] これは，あくまでも例示的目的で同研究グループが 1999 年に発表した論文を引用したものであり，同グループによるそれ以降の改訂等は考慮していない。

未知パラメータについて，ガラスびんリサイクル促進協議会から入手したデータを下に，以下の数値が設定されている ([4] p.97) (単純化のため原数値を四捨五入した):

$$\text{ガラス瓶生産量} = 1.5\left[0.5\,\text{処女素材投入}^{.7} + 0.5\,\text{カレット投入}^{.7}\right]^{1/0.7} \tag{8}$$

(6) から $\sigma = 1/(1-.7) = 3.33$ となるので，一方の投入を十分大きくすれば他方の投入はゼロとすることが出来ることになる。確かに，処女素材のみを用いて生産を行うことには何ら技術的な問題は無い。しかし，その逆にカレット投入を大きくして処女素材投入をなくすことが可能かは大いに疑問である。

一般に処女素材とカレットなどのリサイクル素材では，後者の方が異物混入や疲労のため品質において劣っている。そのため，リサイクルにおいては後者のみを用いるのではなく，それを前者と混合して用いるのが一般的である。要するに，処女素材とリサイクル素材の代替関係は非対称性 (又は非連続性) を持つのである。これを図式的に等量曲線として表したのが図 1 である。然るに，(8) はこの点を考慮していない。標準的な経済学はその理論構成において廃棄物を考慮していないから，品質の相違に基づく代替の非対称性が考慮されていないのは当然である。しかし，廃棄物の分析に廃棄物を考慮していない概念をそのまま用いるのは適当とは言えないのではないだろうか。

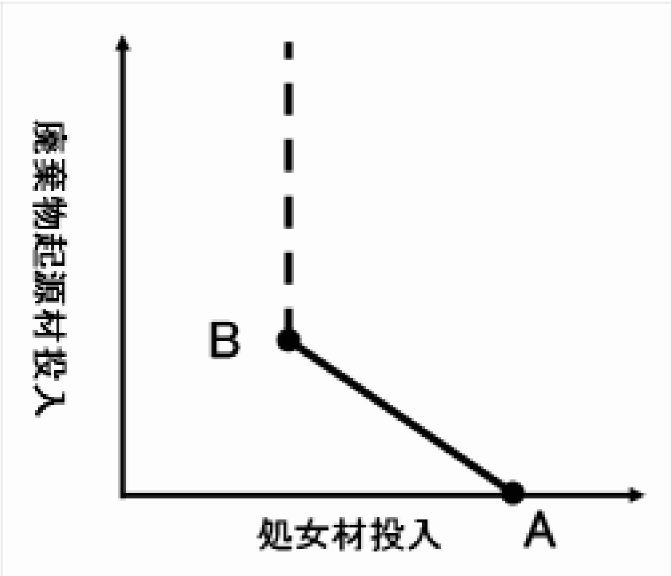

図 1: 非対称性を持つ等量曲線

図は一定の産出に必要な 2 種類の投入量の組み合わせ (等量曲線) を表す。この場合，処女材のみでの生産は全く問題がない (点 A) のに対し，品質において劣る廃棄物起源材の混入比率を B 点以上に上げることは不可能である。

上で述べたように，投入と産出の物質収支が成立するのは σ が 0 か ∞ の場合である。今の場合, $\sigma = 3.33$ であるから収支は成立しない。この含意を見るため，(8) を用いて所与の生産量と処女材投入に対応したカレット投入を求めたのが表 1 である。15 の生産量に対し，投入合計は 20 から 27 の間を変動する。2 種類の投入は「異質」のものなので，そ

表 1: ガラス CES モデルを用いた試算

処女素材投入量 x_1	カレット投入量 1) x_2	リサイクル率 a x_2/y	投入合計 $X := x_1 + x_2$	リサイクル率 b x_2/X
25	0.4	0.03	25.4	0.01
20	2.5	0.16	22.5	0.11
15	5.7	0.38	20.7	0.27
10	10.0	0.67	20.0	0.50
5	15.9	1.06	20.9	0.76
0	26.9	1.79	26.9	1.00

1) (8) でガラス瓶生産量 $y = 15$ として求めた。

の投入合計は経済学的観点からの生産への貢献という意味では何の理論的な意味も持たない事になるのかも知れない。従って，一定の生産量について投入合計がこのように変動する事にも，それ自体意味が無いことには成るのであろう。

しかし，x_2/y として定義したリサイクル率 a (これは，[4] p. 95 の式 (s3-7) における `REC` に対応する) が 100%を超えるとするのは何とも理解に苦しむ。完全代替ではないので処女素材投入を減らすにはその減少分を上回るカレット投入が必要ということではあるが，その場合，リサイクル率は大した意味を持たないように見える。少なくとも，このような 100%を超える可能性を持つリサイクル率を政策目的に用いることは先ずもって不可能であろう。投入合計に占めるカレットの割合として定義した通常のリサイクル率 b は定義から 100% を超えることはないが，今の場合，投入合計そのものに意味がないので，この定義も意味を持たないことになる。

4 結語

CES 関数 (8) を用いたリサイクルの経済分析は以下の点で根本的な問題を持つように見える:

1. 物質保存則に抵触する，
2. 処女素材と廃棄物素材の代替関係における非対称性を考慮していない。

これに対し,「そもそも代替関係が不完全なのであるから投入合計は何らの理論的意味も持たない。CES 関数を用いてこそ理論と整合的な正しい集計が可能である」との反論が出るかも知れない。しかし，これは CES 関数や分離可能性の特定化がかなりの信頼性を持つ事を前提としている。残念ながら，計量経済学における過去 40 年の歴史は，代替弾性値 σ の値一つをとっても，これが妥当しないことを示しているようである。その数値的根拠が覚束ないパラメータに基づく計算方法をして「理論と整合的な正しい集計」と主張しても，少なくとも現実の政策に対する含意は限りなく小さいであろう。実際，同書所収の菅

論文 (p.130) では，国産形鋼と輸入形鋼について CES 関数を推定し，$\sigma = -1.9$ との推定結果を得ている。負の代替弾性値は代替効果の分析と整合を持たないはずなのだが，菅氏の記述に特にその点を気に留めた形跡が無いのは不思議である。

経済学的観点からすれば，物質保存則が満たされるか否かは大して重要な問題ではないのかも知れない。実際，この問題は殆ど無視されてきたのである。しかし，物理量に関わる環境・廃棄物を対象とする場合，この点を無視することは事の本質を見誤ると言わざるを得ない。生産とは，原材料 (部品を含む) を資本設備という容器の中でエネルギーを加えて製品に変換する過程である。残渣・廃棄物・排ガスは，原材料投入量と製品産出量の差分である。これらを分析の対象とする場合，物質保存則を無視するのは不適切である。製品歩留まりが 100%で無い限り，処女素材投入量とカレット投入量の合計は製品重量を上回るであろう。その差分がいかなる形状で如何ほど発生するかが問題なのである。投入量の合計は経済理論的に意味を持たない，とするならば，この差分も経済理論的な意味を持たないことには成る。しかし，このような「経済理論」が廃棄物分析に如何ほどの有効性を持つのか，大いに議論の余地があると思われる。

参考文献

[1] Arrow, K. J., Chenery, H. B. Minhas, B. and Solow, R. M.: Capital-labor substitution and economic effciency, Review of Economics and Statistics, 43, 1961.

[2] http://www.kantei.go.jp/jp/mille/991020millpro.html

[3] http://www.kantei.go.jp/jp/mille/zyunkangata/index.html

[4] 清水雅彦，菅幹雄，斉藤崇他: ガラスびん・鉄のリサイクルモデル，内閣府経済社会総合研究所編，財務省印刷局, 2002 年
http://www.esri.cao.go.jp/jp/archive/sei/sei020/sei020a.pdf

[5] Kainuma, K., Y Matsuoka and T Morita (1999) 'Analysis of Post Kyoto Scenarios: AIM model'. The Energy Journal, Special Issue of the Cost of the Kyoto Protocol: A Multi-Model Evaluation, 207-220.

[6] GTAP-E: An Energy-Environmental Version of the GTAP Model by Burniaux, Jean-Marc and Truong Truong GTAP Technical Paper No. 16, 2002, `http://www.gtap.agecon.purdue.edu/resources/tech_papers.asp`

[7] 「中央環境審議会地球環境部会「目標達成シナリオ小委員会」中間取りまとめ：VII. 温暖化対策の経済性評価 ー数量モデルによる評価ー」温暖化対策の経済性評価 ー数量モデルによる評価ー http://www.env.go.jp/council/06earth/y062-07.html

[8] Henderson, J. M. and R. E. Qunadt: Micro Economic Theory, Mcgrawhill, Tokyo, 1971.