

2015年度

数学（理系）

（問 題）

<H27094581>

注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで、問題冊子および解答用紙には手を触れないこと。
2. 問題は2ページに記載されている。試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚損等に気付いた場合は、手を挙げて監督員に知らせること。
3. 解答はすべて、HBの黒鉛筆またはHBのシャープペンシルで記入すること。
4. 受験番号および氏名は、試験が開始されてから、解答用紙の所定欄に正確に丁寧に記入すること（以下の記入例参照）。所定欄以外に受験番号・氏名を書いてはならない。なお、解答用紙が複数枚ある場合には、それぞれの所定欄に記入すること。
5. 受験番号の記入にあたっては、次の数字見本にしたがい、読みやすいように、正確に丁寧に記入すること。読みづらい数字は採点処理に支障をきたすことがあるので、注意すること。

(記入例) 58001番 ⇒

万	千	百	十	一
5	8	0	0	1

(数字見本)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

6. 解答はすべて所定の解答欄に記入すること。所定欄以外に何かを記入した解答用紙は採点の対象外となる場合がある。
7. 試験終了の指示が出たら、すぐに解答をやめ、筆記用具を置き、解答用紙を裏返しにすること。
8. いかなる場合でも、解答用紙は必ず提出すること。
9. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ること。

問 1. 曲線 $C: y = x^3$ 上の点 P における接線を ℓ とし、 C と ℓ が P とは異なる交点を持つとき、その点を Q とする。 P が C 上の $x < 0$ の部分を動くとき、線分 PQ の中点の軌跡を求めよ。

問 2. 点 $S(2, 0, 0)$ を中心とする半径 2 の球面上の点 $T(a, b, c)$ を通り、ベクトル $\overrightarrow{ST}$ に垂直な平面を α とする。平面 α は x 軸、 y 軸、 z 軸とそれぞれ点 P, Q, R で交わるものとする。次の問に答えよ。

(1) 点 P, Q, R の座標を、 a, b, c を用いて表せ。

(2) $a = 3$ のとき、原点 $O(0, 0, 0)$ と点 P, Q, R を頂点とする四面体 $OPQR$ の体積の最小値を求めよ。

問 3. 正の実数 x に対し $f(x) = \frac{\log x}{x}$ と定義する。また、 $f(x)$ を最大にする x を t_1 、 $f(x)$ の変曲点の x 座標を t_2 とする。次の問に答えよ。ただし、必要ならば $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ を証明なしで用いてよい。

(1) t_1, t_2 を求めて $y = f(x)$ のグラフの概形を描け。

(2) $a > 1$ なる a に対し、 xy 平面上の 4 点 $(0, 0), (a, 0), (a, f(a)), (0, f(a))$ を頂点とする長方形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる円柱の体積を $V(a)$ とする。 $V(a)$ の最大値を求めよ。

(3) 定積分

$$\int_{t_1}^{t_2} V(x) dx$$

を求めよ。

問 4. 正の実数 x と自然数 n に対し

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \left\{ 1 + \cos \frac{x}{n} + \cos \frac{2x}{n} + \cdots + \cos \frac{(n-1)x}{n} \right\}$$

とおく。次の問に答えよ。

(1) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ を求めよ。

(2) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき $\frac{2}{\pi} < f(x) < 1$ が成り立つことを示せ。

<H27094581>

受験 番号	万	千	百	十	一
加氏名					
氏名					

(所定欄以外に番号・氏名を書いてはならない)

2015年度

No.

1	/	4
---	---	---

採点欄

数 学 (理系)
(解 答 用 紙)

問 1.

2015年度

No.

2	/	4
---	---	---

採点欄

数 学 (理系)
(解 答 用 紙)

問 2.

<H27094681>

受験 番号	万	千	百	十	一
加氏名					
氏名					

(所定欄以外に番号・氏名を書いてはならない)

2015年度

数 学 (理系)
(解 答 用 紙)

No.

3	/	4
採	点	欄

問 3 .

2015年度

数 学 (理系)
(解 答 用 紙)

No.

4	/	4
採	点	欄

問 4 .