早稲田大学現代政治経済研究所

貨幣成長が産出ギャップと経済成長に与える長期的な影響

－ニューケインジアンモデルとラーニング・バイ・ドゥーイングモデルの統合－

井上智洋　品川俊介　都築栄司

No.J1404

Working Paper Series

Institute for Research in

Contemporary Political and Economic Affairs

Waseda University

169-8050 Tokyo,Japan

貨幣成長が産出ギャップと経済成長に与える長期的な影響

－ニューケインジアンモデルとラーニング・バイ・ドゥーイングモデルの統合－

井上智洋[*]　品川俊介[†]　都築栄司[‡]

概 要

本稿では、ニューケインジアンモデルとラーニング・バイ・ドゥーイングモデルを統合する。すなわち、DGE モデルに、名目賃金粘着性とラーニング・バイ・ドゥーイング及び知識のスピルオーバーによる内生的経済成長を導入する。このようなモデルの定常状態の分析によって、以下の帰結が示される。長期において物価上昇率は貨幣成長率と経済成長率の差に等しい。より高い貨幣成長率は、より多い雇用量とより高い経済成長率をもたらす。物価上昇率と経済成長率との間には、正の相関関係がある。貨幣成長率を経済成長率に等しくする時、ゼロインフレと自然雇用水準、潜在成長率が実現する。経済成長率より高い貨幣成長率は、インフレーションと正の雇用ギャップ、潜在成長率以上の経済成長率をもたらす。経済成長率より低い貨幣成長率は、デフレーションと負の雇用ギャップ、潜在成長率未満の経済成長率をもたらす。

1　序論

日本経済は、「失われた 20 年」と呼ばれる長期不況の期間、デフレーションと負の雇用ギャップ（産出ギャップ）、低い経済成長率の 3 つを経験した。本稿では、このような長期不況を低い貨幣成長率という単一の要因によって説明し得るような理論モデルを構築したい。その際まず鍵となるのは、モデルの定常状態（長期状態）における名目粘着性である。

[*]早稲田大学
[†]早稲田大学
[‡]千葉経済大学

ニューケインジアン自身によっても看過されがちなことだが、標準的な New Keynesian Phillips Curve（以下 NKPC) を導入したモデルでは、定常状態においても名目粘着性が残存し、長期フィリップス曲線は垂直にならず、それゆえに長期に自然産出水準が達成されるとは限らない。NKPC は、自然失業率仮説と整合的ではなく (マッカラム 2004)、右下がりの長期フィリップス曲線をもたらす可能性がある。

NKPC を自然失業率仮説と整合的な形に修正することもできるが[1]、果たしてそうすべきだろうか。フリードマンが伝統的なケインジアンのフィリップス曲線を理論的に批判して以降、自然失業率仮説は多くの経済学者によって支持されてきた。ところが近年、物価上昇率が低い領域では、長期フィリップス曲線が右下がりであることを主張する論文が提示されている (Akerlof et al. 1996, Benigno and Ricci 2008, Graham and Snower 2008)。長期フィリップス曲線が垂直であったとしても、それは物価上昇率が高い領域に限られているのである。「失われた 20 年」の理論的解明をモチベーションとする我々が関心を持つのは、まさに物価上昇率が低い領域である。したがって、自然失業率仮説と非整合的である元の NKPC をモデルに導入すべきであろう。

そのような NKPC を含むモデル、つまりニューケインジアンモデルは、一般に短期モデルとして位置づけられている。Inoue and Tsuzuki (2011) や Tsuzuki and Inoue (2010) は、短期モデルであるニューケインジアンモデルと長期モデルである貨幣的成長モデルを統合した理論モデルを提示している。具体的には、ニューケインジアンモデルのファクタである Rotemberg(1982) タイプの NKPC と貨幣的成長モデルのファクタである一定率の技術進歩及び貨幣成長の両方を動学的一般均衡 (Dynamic General Equilibrium, DGE) モデルに導入している。このようなモデルの定常状態を分析した結果、「貨幣成長率が技術進歩率を下回った場合、長期的にデフレーションと負の雇用ギャップが発生する」という帰結が得られている。

それでは、長期的な経済成長の低迷についてはどのような理論的説明が可能であろうか。Inoue and Tsuzuki (2011) などのモデルでは、定常状態における経済成長率は外生的に与えられた技術進歩率に等しい。そのままでは、長期的な経済成長の低迷を説明できな

[1]例えば、Rotemberg (1982) のタイプの NKCP を導出するためには、物価の変化（あるいは名目賃金率の変化）にかかる調整費用を $\frac{\gamma}{2}\pi^2$ と仮定する。γ はパラメータであり、π は物価上昇率を表している。このように仮定したならば、定常状態においても価格粘着性が残存し、自然産出水準は必ずしも達成されない。それに対し、$\frac{\gamma}{2}(\pi-\pi^*)^2$ と仮定すれば、定常状態においては価格粘着性が消失し、必ず自然産出水準が達成される。π^* は定常状態の物価上昇率を表している。

いので、本稿ではそれを内生化したい。すなわち、「内生的貨幣成長モデル」と「ニューケインジアンモデル」を統合したい。内生的貨幣成長モデルのファクタとしては、一定率の貨幣成長に加えてラーニング・バイ・ドゥーイング及び知識のスピルオーバによる内生的成長 (Romer 1986) を DGE モデルに導入する。ニューケインジアンモデルのファクタとしては、Rotemberg (1982) タイプの賃金版 NKPC を導入する。ここでは簡単化のために、賃金の粘着性のみを仮定し物価の粘着性は仮定しない。本稿では、以上のような理論モデルの定常状態を分析することによって、貨幣成長が物価上昇や雇用ギャップだけでなく経済成長に対しても及ぼす長期的な影響を検討する。その結果、長期における物価上昇率と経済成長率の間の正の相関関係が見出される。

これまで、Fischer (1993) などの多くの実証研究により、長期における物価上昇率と経済成長率の間には、負の相関関係があることが指摘されてきた。ところが、Kremer et al. (2013) などの近年の実証研究は、(先進国については) 物価上昇率が高い領域で物価上昇率と経済成長率の長期的な負の相関を、物価上昇率が低い領域で正の相関をそれぞれ示している。したがって、物価上昇率が低い領域に限って言えば、本稿の帰結は実証結果と整合的である。

本稿と類似した既存の研究としては、Shinagawa and Inoue (2011) と Vaona (2012) が挙げられる。Shinagawa and Inoue (2011) は、本稿と同様に、内生的貨幣成長モデルに Rotemberg(1982) タイプの NKPC を導入し、定常状態における貨幣成長率と経済成長率との間の関係を分析している。だが、この研究の内生的成長は R&D に基づいており、ラーニング・バイ・ドゥーイングに基づいている本稿とは異なっている。Vaona (2012) は、本稿と同様に、ニューケインジアンモデルにラーニング・バイ・ドゥーイングを導入しモデルの定常状態を分析している。だが、この研究が Taylor (1979) にしたがって緩慢な賃金契約を仮定しているのに対し、本稿は Rotemberg(1982) にしたがって賃金の調整にコストを仮定することで、名目賃金粘着性を作り出している。

本稿の構成は以下の通りである。第 2 節でモデルを提示し、第 3 節でその定常状態について分析する。第 4 節では定常状態の局所的決定性について分析し、第 5 節で結論を述べる。

2　モデル

この経済には、多数の企業と多数の家計がそれぞれ連続的に分布している。企業は $i \in [0,1]$ でインデックスされており、家計は $j \in [0,1]$ でインデックスされている。また、企業は財を供給する際に完全競争市場に、家計は労働力を供給する際に独占的競争市場にそれぞれ直面する[2]。

企業

企業の生産関数をコブ=ダグラス型とする。すなわち、企業 i が生産する最終財の数量 y_i について、

$$y_i = k_i^{\alpha} h_i^{1-\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1 \tag{2.1}$$

と設定する。k_i は投入される資本ストックである。資本減耗は存在しないものと仮定する。h_i は投入される集計的な労働力であり、

$$h_i \equiv \left[\int_0^1 h_{ij}^{\frac{\phi-1}{\phi}} dj \right]^{\frac{\phi}{\phi-1}}, \qquad \phi > 1 \tag{2.2}$$

と定義される[3]。h_{ij} は企業 i が投入する家計 j の異質的な労働力であり、$h_{ij} \equiv z l_{ij}$ である。ϕ は各異質的な労働力の間の代替の弾力性を表すパラメータである。l_{ij} は企業 i が家計 j の労働者を雇用する量である。z は技術水準であり、Arrow (1962) と Romer (1986) にしたがい、$z = k$ とする。$k(\equiv \int_0^1 k_i di)$ は経済全体の資本ストックである。これは、企業の投資に伴ってラーニング・バイ・ドゥーイングが生じ、また得られた知識のスピルオーバーが生じるため、経済全体の資本ストックの増大に応じて労働者が生産活動を効率化することを意味する。

式 (2.2) を制約として、企業 i が支払う総賃金 $\int_0^1 W_j h_{ij} dj$ を最小化する最適化問題を解くと、

$$h_{ij} \;=\; \left(\frac{W_j}{W} \right)^{-\phi} h_i \tag{2.3}$$

[2] 財については価格の粘着性を仮定しないため、独占的競争市場にする必要がない。本稿では、簡単化のために完全競争市場を仮定したが、独占的競争市場に変更しても主要な帰結に変化はない。

[3] Dixit and Stiglitz (1977) 及び Blanchard and Kiyotaki (1987) を参照のこと。

が得られる。W_j は異質的な労働力 j の名目賃金率である。W は(集計的な労働力の）名目賃金率であり、

$$W \equiv \left[\int_0^1 W_j^{1-\phi} dj \right]^{\frac{1}{1-\phi}} \tag{2.4}$$

である。

企業 i の瞬時的な利潤 Π_i を、

$$\Pi_i = y_i - wh_i - rk_i \tag{2.5}$$

とする。$w(\equiv W/p)$ は(集計的な労働力の）実質賃金率、r は実質利子率である。

企業は完全競争状態におかれており、利潤 Π_i はゼロである。また、全ての企業が同じ行動方程式にしたがうので、$k_i = k$、$h_i = h(\equiv \int_0^1 h_i di)$ が成り立ち、

$$w = (1-\alpha)\left(\frac{h}{k}\right)^{-\alpha} \tag{2.6}$$

$$r = \alpha\left(\frac{h}{k}\right)^{1-\alpha} \tag{2.7}$$

が得られる。

家計

家計 j は消費 c_j と実質貨幣残高 m_j から効用を得て、労働 l_j から不効用を得る。すなわち、家計 j の時点効用を

$$\ln c_j + \ln m_j - \frac{l_j^{1+\psi}}{1+\psi} - \frac{\gamma}{2}\omega_j^2, \qquad \psi > 0 \tag{2.8}$$

と仮定する。$\omega_j(\equiv \dot{W}_j/W_j)$ は名目賃金率 W_j の変化率である。$\frac{\gamma}{2}\omega_j^2$ は名目賃金率を変更することに伴う調整費用を表している[4]。γ は調整費用の大きさを表すパラメータであり、$\gamma \to 0$ ならば名目賃金率は伸縮的、$\gamma > 0$ ならば粘着的となる。

家計 j は資産として、実質残高 m_j の貨幣と k_j だけの資本を保有している。家計の予算制約は、

$$\dot{a}_j = ra_j + w_jh_j - c_j - Rm_j \tag{2.9}$$

[4]Rotemberg (1982) を参照のこと。

である。$a_j(\equiv m_j + k_j)$ は家計 j の実質資産残高、$w_j(\equiv W_j/p)$ は異質的な労働力 j の実質賃金率、$h_j(\equiv \int_0^1 h_{ij}di)$ は供給する労働力の合計、$R(\equiv \pi + r)$ は名目利子率である。

以上の設定により、家計 j は、次のような動学的最適化問題に直面することになる。

$$\max_{c_j, m_j, \omega_j} \int_0^\infty \left[\ln c_j + \ln m_j - \frac{l_j^{1+\psi}}{1+\psi} - \frac{\gamma}{2}\omega_j^2 \right] e^{-\rho t} dt$$

$$\begin{aligned} \text{subject to} \quad & \dot{a} = ra_j + w_j h_j - c_j - Rm_j \\ & \dot{W}_j = \omega_j W_j \\ & h_j = \left(\frac{W_j}{W} \right)^{-\phi} h \\ & h_j = zl_j \end{aligned}$$

$\rho(>0)$ は家計の主観的割引率である。

この動学的最適化問題を解くと

$$\frac{\dot{c}}{c} + \pi + \rho = R = \frac{c}{m} \tag{2.10}$$

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega} = \rho - \phi \frac{l^{1+\psi}}{\gamma\omega} + \frac{(\phi-1)(1-\alpha)l^{1-\alpha}}{\gamma\hat{c}\omega} \tag{2.11}$$

が得られる。ただし、全ての家計は同じ行動方程式にしたがっているので、$c_j = c(\equiv \int_0^1 c_j dj)$、$m_j = m(\equiv \int_0^1 m_j dj)$、$l_j = l(\equiv \int_0^1 l_j dj)$、$h_j = h$、$w_j = w$ が成り立っている。また、全ての家計で同じ名目賃金上昇率 ω となる ($\omega_j = \omega$)。式 (2.10) はケインズ=ラムゼールールであり、 式 (2.11) は賃金版 NKPC である。

なお、$z = k$、$h_{ij} \equiv zl_{ij}$、$l_j = l$ なので、 式 (2.6) と式 (2.7) はそれぞれ、

$$w = (1-\alpha)l^{-\alpha} \tag{2.12}$$

$$r = \alpha l^{1-\alpha} \tag{2.13}$$

と書き換えられる。また、式 (2.10) と式 (2.13) から、

$$g \equiv \frac{\dot{c}}{c} = \alpha l^{1-\alpha} - \rho \tag{2.14}$$

が得られる。g は消費量成長率である。

中央銀行

中央銀行は、マネーサプライ M を一定の率 $\theta(\geq 0)$ で増大させるものとする。すなわち、

$$\frac{\dot{M}}{M} = \theta$$

である。実質貨幣残高 m は、$m \equiv M/p$ であるから、

$$\frac{\dot{m}}{m} = \frac{\dot{M}}{M} - \frac{\dot{p}}{p} = \theta - \pi \tag{2.15}$$

が成り立つ。

3　定常状態の分析

微分方程式系と定常値

財市場の均衡条件 $y = c + I$ を考慮すると、式 (2.11)、(2.10)、(2.12)、(2.13)、(2.15) は、次のような微分方程式系に集約される。

$$\frac{\dot{R}}{R} = R - (\theta + \rho) \tag{3.1}$$

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \hat{c} - (1-\alpha)l^{1-\alpha} - \rho \tag{3.2}$$

$$\frac{\dot{l}}{l} = \frac{1}{\alpha}(R - \alpha l^{1-\alpha} - \omega) \tag{3.3}$$

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega} = \rho - \phi\frac{l^{1+\psi}}{\gamma\omega} + \frac{(\phi-1)(1-\alpha)l^{1-\alpha}}{\gamma\hat{c}\omega} \tag{3.4}$$

ただし、$\hat{c} \equiv c/k$ である。

各変数の非自明な定常値は、

$$R^* = \theta + \rho \tag{3.5}$$

$$\hat{c}^* = (1-\alpha)l^{*1-\alpha} + \rho = l^{*1-\alpha} - g^* \tag{3.6}$$

$$\omega^* = \pi^* = \theta - \alpha l^{*1-\alpha} + \rho = \theta - g^* \tag{3.7}$$

となる。$*$ を付した変数は定常値を表している。$g*$ は定常状態の消費量成長率であり

$$g^* = \alpha l^{*1-\alpha} - \rho \tag{3.8}$$

である。l^* は、

$$[(1-\alpha)l^{*1-\alpha} + \rho]\left[(\theta + \rho - \alpha l^{*1-\alpha})\rho\gamma - \phi l^{*1+\psi}\right] + (\phi - 1)(1-\alpha)l^{*1-\alpha} = 0 \tag{3.9}$$

を満たす。

式 (3.7) から次の命題が言える。

Proposition 1 定常状態において、物価上昇率 π^* は貨幣成長率 θ と経済成長率 g^* の差に等しい。

これは、Siegel (1983) における対数効用関数を仮定した場合の結果と同じである。ただし、Siegel (1983) のモデルでは、賃金粘着性は存在せず、定常状態の経済成長率は外生的な技術進歩率に等しい。Proposition 1 は、賃金粘着性を導入し、定常状態の経済成長率を内生化しても、Siegel (1983) と同じ結果が得られることを含意している。

貨幣成長率と雇用量、経済成長率

次に、定常状態において、貨幣成長率の変化が雇用量と経済成長率にどのような影響をもたらすのかを分析したい。

$x \equiv l^{*1-a}$ と定義し、式 (3.9) に基づいて、θ を x の関数 $\Omega(x)$ として表すと、

$$\theta = \Omega(x) = \frac{1}{\rho\gamma}\left[-\frac{(\phi-1)(1-\alpha)x}{(1-\alpha)x+\rho} + \phi x^{\frac{1+\psi}{1-\alpha}}\right] + \alpha x - \rho \tag{3.10}$$

となる。

式 (3.10) を微分すると

$$\Omega'(x) = \frac{1}{\rho\gamma}\left[-\frac{\rho(\phi-1)(1-\alpha)}{[(1-\alpha)x+\rho]^2} + \frac{1+\psi}{1-\alpha}\phi x^{\frac{\alpha+\psi}{1-\alpha}}\right] + \alpha \tag{3.11}$$

が得られる。$x = 0$ で評価した Ω' は、

$$\Omega'(0) = -\frac{(\phi-1)(1-\alpha)}{\gamma\rho^2} + \alpha$$

である。また、式 (3.11) をさらに微分すると、

$$\Omega''(x) = \frac{1}{\rho\gamma}\left[\frac{2\rho(\phi-1)(1-\alpha)^2}{[(1-\alpha)x+\rho]^3} + \phi\frac{(1+\psi)(\alpha+\psi)}{(1-\alpha)^2}x^{\frac{2\alpha+\psi-1}{1-\alpha}}\right] > 0 \tag{3.12}$$

が得られる。

以上のことから、次のことが言える。

- ケース 1: $\Omega'(0) \geq 0$ が成り立つならば、$\Omega(x)$ は単調増加である（図 1 参照)。
- ケース 2: $\Omega'(0) < 0$ が成り立つならば、ある x_1 が存在して、$x < x_1$ について $\Omega'(x) < 0$ であり、$x > x_1$ について $\Omega'(x) > 0$ である（図 2 参照)。$\Omega(0) = -\rho < 0$ なので、少なくとも $\theta = \Omega(x) \geq 0$ の領域では、単調増加となる。

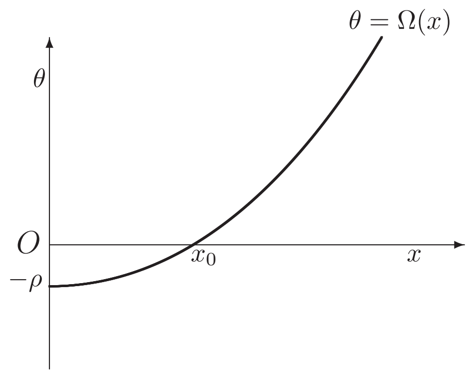

図 1: $\Omega'(0) \geq 0$

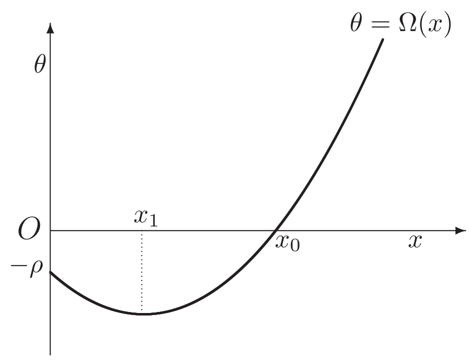

図 2: $\Omega'(0) < 0$

いずれのケースであっても、少なくとも $\theta \geq 0$ の領域では、$\Omega(x)$ は単調増加である[5]。したがって、より高い貨幣成長率 θ は、より多い雇用量 $l^*(= x^{\frac{1}{1-a}})$ をもたらす。さらに式 (3.8) を考慮すると、次の命題が言える。

Proposition 2 定常状態において、より高い貨幣成長率 θ は、より多い雇用量 l^* とより高い経済成長率 g^* をもたらす。

[5]後述するような現実妥当性のある数値をパラメータに設定すると、ケース 2 となる。

物価上昇率と経済成長率

定常状態における物価上昇率 π^* と経済成長率 g^* の関係を明らかにするために、まず貨幣成長率 θ と物価上昇率 π^* の関係を論じたい。式 (3.7) と式 (3.8)、$x \equiv l^{*1-a}$ により、

$$\pi^* = \theta - (\alpha x - \rho) \tag{3.13}$$

が得られる。この式を θ で微分すると、

$$\frac{d\pi^*}{d\theta} = 1 - \alpha\frac{dx}{d\theta} \tag{3.14}$$

となる。この式の符号は明らかではなく、貨幣成長率 θ の上昇が定常状態の物価上昇率 π^* を上昇させるかどうかは定かでない。$\frac{dx}{d\theta} \leq 0$ の時、式 (3.14) の符号は明らかに正である。以下では $\frac{dx}{d\theta} > 0$、つまり $\frac{d\theta}{dx} = \Omega'(x) > 0$ のケースについて考える。

$\Omega'(x) \neq 0$ なので、$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\Omega'(x)}$ が求められる。式 (3.14) に基づけば、$\frac{d\pi^*}{d\theta} > 0$ になる条件は $\frac{dx}{d\theta} < \frac{1}{\alpha}$ あるいは、

$$\Omega'(x) > \alpha \tag{3.15}$$

である。

ここで、$\theta = \Omega(x) = 0$ を満たす x の値を x_0 と定義する (図 1 及び図 2 参照)。$\theta \geq 0$ の時、$x \geq x_0$ である。式 (3.12) により、$\Omega'(x_0) > \alpha$ であれば、$\theta \geq 0$ の範囲で、条件 (3.15) が成り立つことが分かる。

ここで、現実妥当性を持つ値を式 (3.10) のパラメータに設定し、x_0 を求める。Fujiwara (2008) で設定された値に倣い、$\phi = 21$、$\gamma = 199$、$\rho = 0.01$、$\psi = 1$、$\alpha = 0.4$ とする。これらは、4 半期ベースの値である。その結果、$x_0 \simeq 0.97$ が得られる。この値を式 (3.11) に当てはめると、$\Omega'(x_0) \simeq 32.99 > \alpha(= 0.4)$ となる。したがって、$\theta \geq 0$ の範囲では条件 (3.15) が成り立っており、貨幣成長率 θ と物価上昇率 π^* の間には正の相関関係がある。Proposition 2 を考慮すると、次の命題が言える。

Proposition 3 定常状態において、物価上昇率 π^* と経済成長率 g^* の間には正の相関関係がある

自然雇用水準と潜在成長率

自然雇用水準について考える。これは、価格が完全に伸縮的な経済 ($\gamma \to 0$) における雇用水準である。式 (3.9) により、 自然雇用水準 l_n が

$$(\rho {l_n}^{\alpha-1} + 1 - \alpha)\phi {l_n}^{1+\psi} = (1-\alpha)(\phi - 1) \tag{3.16}$$

を満たすことが分かる。

価格が完全に伸縮的な経済 ($\gamma \to 0$) における経済成長率を潜在成長率と呼ぶことにする。潜在成長率 g_n は、

$$g_n = \alpha {l_n}^{1-\alpha} - \rho \tag{3.17}$$

である。

これらの式と式 (3.9)、Proposition 1 と 2 から、次の命題が言える。

Proposition 4 定常状態において、以下のことが成り立つ。

(a) 貨幣成長率 θ が成長率 g^* と等しい時、ゼロインフレと自然雇用水準 l_n、潜在成長率 g_n が実現する。

(b) 貨幣成長率 θ が成長率 g^* より高い時、インフレーションと正の雇用ギャップ、潜在成長率 g_n 以上の成長率が発生する。

(c) 貨幣成長率 θ が成長率 g^* より低い時、デフレーションと負の雇用ギャップ、潜在成長率 g_n 未満の成長率が発生する。

4 定常状態の局所的決定性

定常状態の局所的決定性について分析する。式 (3.1)-(3.4) から成る微分方程式系の、定常状態で評価したヤコビ行列 J_1 は、

$$J_1 \equiv \begin{bmatrix} R^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{c}^* & -(1-\alpha)^2(\ell^*)^{-\alpha}\hat{c}^* & 0 \\ \frac{1}{\alpha}\ell^* & 0 & -(1-\alpha)(\ell^*)^{1-\alpha} & -\frac{1}{\alpha}\ell^* \\ 0 & A_{42} & A_{43} & \rho \end{bmatrix}$$

となる。ここで、$A_{42} \equiv -\frac{(\phi-1)(1-\alpha)}{\gamma}\frac{(\ell^*)^{1-\alpha}}{(\hat{c}^*)^2} < 0$、$A_{43} \equiv -\frac{\phi(1+\psi)}{\gamma}(\ell^*)^{\psi} + \frac{(\phi-1)(1-\alpha)^2}{\gamma}\frac{(\ell^*)^{-\alpha}}{\hat{c}^*}$ である。

ヤコビ行列 J_1 は分解可能である。よって、特性方程式は、

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda) &\equiv (\lambda - R^*)|\lambda I - J_2| \\ &= (\lambda - R^*)(\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3) = 0\end{aligned} \tag{4.1}$$

となる。ただし、

$$J_2 \equiv \begin{bmatrix} \hat{c}^* & -(1-\alpha)^2(\ell^*)^{-\alpha}\hat{c}^* & 0 \\ 0 & -(1-\alpha)(\ell^*)^{1-\alpha} & -\frac{1}{\alpha}\ell^* \\ A_{42} & A_{43} & \rho \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} b_1 &\equiv -trJ_2 \\ &= -\hat{c}^* + (1-\alpha)(\ell^*)^{1-\alpha} - \rho \\ &= -2\rho < 0 \ ((3.6)\text{ より}) \\ b_2 &\equiv J_2\text{ のすべての 2 次主小行列式の和} \\ &= \begin{vmatrix} \hat{c}^* & -(1-\alpha)^2(\ell^*)^{-\alpha}\hat{c}^* \\ 0 & -(1-\alpha)(\ell^*)^{1-\alpha} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{c}^* & 0 \\ A_{42} & \rho \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -(1-\alpha)(\ell^*)^{1-\alpha} & -\frac{1}{\alpha}\ell^* \\ A_{43} & \rho \end{vmatrix} \\ &= -(1-\alpha)(\ell^*)^{1-\alpha}\hat{c}^* + \rho\hat{c}^* - (1-\alpha)(\ell^*)^{1-\alpha}\rho + \frac{1}{\alpha}\ell^* A_{43} \\ b_3 &\equiv -detJ_2 \\ &= \rho(1-\alpha)(\ell^*)^{1-\alpha}\hat{c}^* - \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha}(\ell^*)^{1-\alpha}\hat{c}^* A_{42} - \frac{1}{\alpha}\ell^*\hat{c}^* A_{43} \end{aligned}$$

である。

式 (3.9) は式 (3.6) と (3.7) を使って次のように書き換えられる。

$$(\phi - 1)(1-\alpha)\frac{(\ell^*)^{1-\alpha}}{\hat{c}^*} = \phi(\ell^*)^{1+\psi} - \rho\gamma\pi^*$$

この式を用いると、A_{43} は次のように書き換えられる。

$$A_{43} = -\frac{(\psi+\alpha)(\phi-1)(1-\alpha)}{\gamma}\frac{(\ell^*)^{-\alpha}}{\hat{c}^*} - (1+\psi)\rho\frac{\pi^*}{\ell^*} \tag{4.2}$$

もし $\pi^* \geq 0$ ならば、$A_{43} < 0$ である。$\pi^* < 0$ の場合には、A_{43} の符号は不明である。

式 (4.1) より、J_1 の固有値の一つは正の実数（$R^* > 0$）である。残り 3 つの固有値（J_2 の固有値）の実部の符号を調べるために、次の補題を適用する。

Lemma 1 特性方程式 $\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3 = 0$ のすべての根の実部が正（すなわち決定）であるための必要十分条件（逆ラウス-フルヴィッツ定理）は、

$$b_1 < 0, b_2 > 0, b_3 < 0, \Lambda \equiv b_1 b_2 - b_3 < 0$$

である[6] 。

$\pi^* \geq 0$ ならば、$A_{43} < 0$ であるから、$b_3 > 0$ である。この場合、Lemma 1 の条件の少なくとも一つが満たされないので、定常状態は不決定である[7]。

$\pi^* < 0$ ならば、解析的には Lemma 1 が満たされるかどうかは不明なので、パラメータ値を設定して調べるしかない。

式 (4.2) から、もし

$$\pi^* > -\frac{(\psi+\alpha)(\phi-1)(1-\alpha)}{(1+\psi)\rho\gamma}\frac{(\ell^*)^{1-\alpha}}{\hat{c}^*}$$

すなわち、

$$\theta - \alpha x + \rho > -\frac{(\psi+\alpha)(\phi-1)(1-\alpha)}{(1+\psi)\rho\gamma}\frac{x}{(1-\alpha)x+\rho} \tag{4.3}$$

が成り立つならば、$A_{43} < 0$ であるといえる。

前節で提示した標準的なパラメータ値及び $\theta = 0$（$x = x_0 \approx 0.97$）を代入すると、式 (4.3) の左辺の値は-0.4、右辺の値は-0.75 となるので、不等号が満たされる。また、前節で示されたように、任意の $\theta \geq 0$ に対して $\frac{d\pi^*}{d\theta} > 0$ であるから式 (4.3) の左辺は θ の増加関数である。一方、$\frac{dx}{d\theta} > 0$ 及び $\frac{d\mathrm{RHS}}{dx} = -\frac{(\psi+\alpha)(\phi-1)(1-\alpha)}{(1+\psi)\rho\gamma}\frac{\rho}{(\hat{c}^*)^2} < 0$ なので、右辺は θ の減少関数である。ただし、$\mathrm{RHS} \equiv -\frac{(\psi+\alpha)(\phi-1)(1-\alpha)}{(1+\psi)\rho\gamma}\frac{x}{(1-\alpha)x+\rho}$ である。したがって、任意の $\theta \geq 0$ に対して式 (4.3) が成り立つ。

よって、$\pi^* < 0$ の場合にも、$\theta \geq 0$ であれば定常状態は不決定である。

[6] Tsuzuki (2013) の Lemma 2

[7] tr は根の和、det は根の積であることを想起すれば、$-trJ_2 < 0$ 及び $-detJ_2 > 0$ であることから、J_2 は正の実部を持つ固有値を 2 つ持つと分かる。

5　結論

本稿では、ニューケインジアンモデルとラーニング・バイ・ドゥーイングモデルを統合した。すなわち、DGE モデルに、名目賃金粘着性とラーニング・バイ・ドゥーイング及び知識のスピルオーバーによる内生的経済成長を導入した。このようなモデルの定常状態を分析した結果、以下の帰結が得られた。

長期において物価上昇率は貨幣成長率と経済成長率の差に等しい。より高い貨幣成長率は、より多い雇用量とより高い経済成長率をもたらす。物価上昇率と経済成長率との間には、正の相関関係がある。貨幣成長率を経済成長率に等しくするとき、ゼロインフレと自然雇用水準、潜在成長率が実現する。経済成長率より高い貨幣成長率は、インフレーションと正の雇用ギャップ、潜在成長率以上の経済成長率をもたらす。経済成長率より低い貨幣成長率は、デフレーションと負の雇用ギャップ、潜在成長率未満の経済成長率をもたらす。

A　付録

A.1　家計の最適化

家計の動学的最適化問題を解いて、賃金版 NKPC(2.11) を導出する。

$l_j = h_j/z$ を考慮し、ハミルトン関数を、

$$\mathcal{H} = \ln c_j + \ln m_j - \frac{1}{1+\psi}\left[\left(\frac{W_j}{W}\right)^{-\phi}\frac{h}{z}\right]^{1+\psi} - \frac{\gamma}{2}\omega_j^2 + \mu_1\left[ra_j + \frac{W_j}{p}\left(\frac{W_j}{W}\right)^{-\phi}h - c_j - Rm_j\right] + \mu_2\omega_j W_j \tag{A.1}$$

と設定する。ここで、μ_1 と μ_2 はそれぞれ状態変数 a_j と W_j の共役変数である。

式 (A.1) を制御変数 c_j、m_j、ω_j で微分して得られる 1 階の条件は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c_j} &= \frac{1}{c_j} - \mu_1 = 0 && \text{(A.2)}\\
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial m_j} &= \frac{1}{m_j} - \mu_1 R = 0 && \text{(A.3)}\\
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega_j} &= -\gamma\omega_j + \mu_2 W_j = 0 && \text{(A.4)}
\end{aligned}$$

である。ヘッセ行列 Hes は、

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hes} &= \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{cc} & \mathcal{H}_{cm} & \mathcal{H}_{c\omega_j} \\ \mathcal{H}_{mc} & \mathcal{H}_{mm} & \mathcal{H}_{m\omega_j} \\ \mathcal{H}_{\omega_j c} & \mathcal{H}_{\omega_j m} & \mathcal{H}_{\omega_j \omega_j} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{1}{c^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{bmatrix} && \text{(A.5)}
\end{aligned}$$

となる。ヘッセ行列 Hes の固有値は全て負なので、式 (A.1) は最適点において厳密に凹である。したがって、式 (A.2)、(A.3)、(A.4) の解は、$\mathcal{H}$ を最大化している。

共役変数 μ_1、μ_2 の運動方程式は、

$$\begin{aligned}
\dot{\mu_1} &= \rho\mu_1 - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a} = (\rho - r)\mu_1 && \text{(A.6)}\\
\dot{\mu_2} &= \rho\mu_2 - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial W_j} \\
&= \rho\mu_2 - \left\{ - \left[\left(\frac{W_j}{W} \right)^{-\phi} \frac{h}{z} \right]^{\psi} (-\phi) \left(\frac{W_j}{W} \right)^{-\phi-1} \frac{h}{z} \frac{1}{W} + \mu_1 (1-\phi) \frac{W_j^{-\phi}}{pW^{-\phi}} h + \mu_2 \omega_j \right\} \\
&= \rho\mu_2 - \left\{ \phi \left[\left(\frac{W_j}{W} \right)^{-\phi} \frac{h}{z} \right]^{1+\psi} \left(\frac{W_j}{W} \right)^{-1} \frac{1}{W} + \mu_1 (1-\phi) \left(\frac{W_j}{W} \right)^{-\phi} \frac{h}{p} + \mu_2 \omega_j \right\} \\
&= \rho\mu_2 - \left[\frac{\phi (h_j/z)^{1+\psi}}{W_j} + \mu_1 (1-\phi) \frac{h_j}{p} + \mu_2 \omega_j \right] && \text{(A.7)}
\end{aligned}$$

となる。

また、横断性条件は、

$$\lim_{t\to\infty}\mu_1(t)a(t)e^{-\rho t}=0$$
$$\lim_{t\to\infty}\mu_2(t)W(t)e^{-\rho t}=0$$

である。

式 (A.7) は

$$\frac{\dot{\mu_2}}{\mu_2} = \rho-\left[\frac{\phi(h_j/z)^{1+\psi}}{W_j}+\mu_1(1-\phi)\frac{h_j}{p}\right]/\mu_2-\omega_j$$

と書き換えられる。$\mu_1=1/c$ と $\mu_2=\gamma\omega_j/W_j$ をこの式に代入すると

$$\frac{\dot{\omega}_j}{\omega_j}-\frac{\dot{W}_j}{W_j}=\rho-\left[\phi\frac{(h_j/z)^{1+\psi}}{W_j}+\frac{1}{c}(1-\phi)\frac{h_j}{p}\right]/\left(\frac{\gamma\omega_j}{W_j}\right)-\omega_j$$

が得られる。

この式は、$W_j=W$、$\omega_j=\omega$、$h_j=h$、$l=h/z$ を用いると、

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega}-\omega=\rho-\left[\phi\frac{l^{1+\psi}}{W}+(1-\phi)\frac{h}{pc}\right]\frac{W}{\gamma\omega}-\omega$$

あるいは、

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega} = \rho-\phi\frac{l^{1+\psi}}{\gamma\omega}+(\phi-1)\frac{hw}{\gamma c\omega}$$

となる。さらに、式 (2.12) により、

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega} = \rho-\phi\frac{l^{1+\psi}}{\gamma\omega}+\frac{(\phi-1)(1-\alpha)l^{1-\alpha}}{\gamma\hat{c}\omega}$$

が成り立つ

A.2 定常値の導出

式 (3.1)-(3.4) から定常状態では、

$$\begin{aligned}
R &= \theta+\rho \\
\hat{c} &= (1-\alpha)l^{1-\alpha}+\rho \\
\omega &= R-\alpha l^{1-\alpha}=\theta+\rho-\alpha l^{1-\alpha} \\
\dot{\omega} &= \omega\rho-\frac{\phi}{\gamma}l^{1+\psi}+\frac{(\phi-1)(1-\alpha)}{\gamma\hat{c}}l^{1-\alpha}=0
\end{aligned}$$

が成り立つことが分かる。さらに、

$$\gamma\hat{c}\left[\omega\rho - \frac{\phi}{\gamma}l^{1+\psi}\right] + (\phi-1)(1-\alpha)l^{1-\alpha} = 0$$
$$\gamma[(1-\alpha)l^{1-\alpha}+\rho]\left[(\theta+\rho-\alpha l^{1-\alpha})\rho - \frac{\phi}{\gamma}l^{1+\psi}\right] + (\phi-1)(1-\alpha)l^{1-\alpha} = 0$$
$$[(1-\alpha)l^{1-\alpha}+\rho]\left[(\theta+\rho-\alpha l^{1-\alpha})\rho\gamma - \phi l^{1+\psi}\right] + (\phi-1)(1-\alpha)l^{1-\alpha} = 0$$

が成り立つ。

参考文献

[1] マッカラム, ベネット T. (2004)「貨幣の長期中立性と現代の政策分析」金融研究第 23 巻第 4 号。

[2] Akerlof, G. A. and W. T. Dickens and G. L. Perry and R. J. Gordon and N. G. Mankiw (1996), "The Macroeconomics of Low Inflation," *Brookings Papers on Economic Activity,* (1), pp.1-76.

[3] Arrow, K. J. (1962) "The Economic Implications of Learning by Doing," *The Review of Economic Studies,* 51, pp.675-692.

[4] Benigno, P. and L. A. Ricci (2008), "The Inflation-Unemployment Trade-Off at Low Inflation," NBER Working Paper No.13986.

[5] Blanchard, O. J. and N. Kiyotaki (1987) "Monopolistic Competition and the Effects of Aggregate Demand," *American Economic Review,* 77, pp.647-666.

[6] Dixit, A. K. and J. E. Stiglitz, (1977) "Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity," *American Economic Review,* 67, 3, pp 297-308.

[7] Fischer, S. (1993) "The Role of Macroeconomic Factors in Growth," *Journal of Monetary Economics,* 32, pp.485-512.

[8] Fujiwara, I. (2008) "Growth Expectation," IMES Discussion Paper Series 08-E-21, Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan.

[9] Graham, L. and D. J. Snower (2008) "Hyperbolic Discounting and the Phillips Curve," *Journal of Money, Credit and Banking,* 40, pp.427-448.

[10] Inoue, T. and E. Tsuzuki (2011) "A New Keynesian Model with Technological Change," *Economics Letters,* 110, 3, pp.206-208.

[11] Kremer, S., A. Bick, and D. Nautz (2013) "Inflation and Growth: New Evidence from a Dynamic Panel Threshold Analysis," *Empirical Economics,* 44, pp. 861-878.

[12] Romer, P. M. (1986) "Increasing Returns and Long-run Growth," *Journal of Political Economy,* 94, pp.1002-1037.

[13] Rotemberg, J. J. (1982) "Sticky Prices in the United States," *Journal of Political Economy,* 90, 6, pp.1187-1211.

[14] Shinagawa, S. and T. Inoue (2011) "A New Keynesian Model with Endogenous Technological Change," GCOE-GLOPE II Working Paper Series, 46, pp.1-23.

[15] Siegel, Jemmy J. (1983) "Technological Change and the Superneutrality of Money," *Journal of Money, Credit and Banking,* 15, pp.363-367.

[16] Taylor, J. B. (1979) "Staggered Wage Setting in a Macro Model," *American Economic Review,* 69, pp.108-113.

[17] Tsuzuki, E. (2013) "Unimodality of a Weight Function in Backward-Looking Interest-Rate Rules and Determinacy of Equilibrium," *Keizaironshu,* The Economics Society, Daito Bunka University, 100, pp.147-171.

[18] Tsuzuki, E. and T. Inoue (2010) "Policy Trade-off in the Long Run: A New Keynesian Model with Technological Change and Money Growth," *Economic Modelling,* 27, 5, pp.934-950.

[19] Vaona, A. (2012) "Inflation and Growth in the Long Run: A New Keynesian Theory and Further Semiparametric Evidence," *Macroeconomic Dynamics,* 16, pp.94-132.