G-COE GLOPE II Working Paper Series

A Theoretical Model of Long-term Deflationary Recession: The Zero-interest-rate Bound, the Taylor Rule, and Output Gap

Tomohiro Inoue, Shunsuke Shinagawa, and Eiji Tsuzuki

Working Paper No. 48

長期デフレ不況の理論モデル

ーゼロ金利制約・テイラールール・産出ギャップー

井上智洋* 品川俊介† 都築栄司‡

概 要

本稿では、Inoue and Tsuzuki (2011) と同様に、「技術進歩」と「ニューケインジアンフィリップス曲線」を含む DGE モデルを構築する。ただし、金融政策として Benhabib et al. (2001) で提示された「ゼロ金利制約を考慮したテイラールール」を採用する。その結果、「望ましい定常状態」と「望ましくない定常状態」の 2 つが発生する。産出ギャップがゼロになる望ましい定常状態を中央銀行が目指したとしても、期待の如何によっては望ましくない定常状態が実現することがある。後者の定常状態ではデフレーションを伴った産出ギャップがもたらされる。これはつまり、長期デフレ不況が発生する可能性を示している。

1 序論

Inoue and Tsuzuki (2011) では、「技術進歩を含むニューケインジアン DGE モデル」が提示されている。それは、「持続的で外生的な技術進歩」と「ニューケインジアンフィリップス曲線」(NKPC) を導入した動学的一般均衡（DGE）モデルである。金融政策としては、一定率の貨幣成長を常に維持するルール (フリードマンの k%ルール）を採用している。

そこで導入されている NKPC はローテンバーグ型であり、また自然失業率仮説が成り立たない形式のものである。ある形式の NKPC の下では、モデルの定常状態においても、自然失業率（価格伸縮的な経済における失業率）が達成されるとは限らないのである。

*早稲田大学　Email：inouetomo@gmail.com
†早稲田大学　Email：shinagawa@aoni.waseda.jp
‡中央大学　Email：tsuzukie5@gmail.com

ローテンバーグ型のNKPCを導出する際に、価格調整コストを$\gamma\frac{(\pi-\pi^*)^2}{2}$と仮定すれば、価格の粘着性は定常状態で消滅し、自然失業率仮説が成り立つ。$\gamma\frac{\pi^2}{2}$と仮定すれば、価格の粘着性は定常状態であっても残存し、自然失業率仮説が成り立たない。πは物価上昇率、π^*はその定常値、γはパラメータである。Inoue and Tsuzuki (2011) では、価格調整コストとして$\gamma\frac{\pi^2}{2}$の方を仮定している。この仮定は、定常状態における産出ギャップを考える上で決定的な役割を果たす。

Inoue and Tsuzuki (2011) では、このようなセットアップのモデルを用いて、定常状態における物価上昇率や産出水準について分析した結果、

- 貨幣成長率を技術進歩率と等しくした時、定常状態における物価上昇率はゼロになり、産出ギャップは解消される
- 貨幣成長率が技術進歩率を下回るとき、定常状態においてデフレーションと産出ギャップの両方が発生する

といった帰結が得られる。これらの帰結の持つ金融政策にとってのインプリケーションはシンプルであり、中央銀行は技術進歩率以上の貨幣成長率を維持しさえすれば良いということになる。

ところが、現実の中央銀行は、k%ルールを採用しておらず、産出ギャップや物価上昇率に応じて機動的に名目利子率を変化させる。そのような金融政策を定式化したものとして、いわゆる「テイラールール」がある。

テイラールールについては、物価上昇率の変化に対し強く利子率を変化させる「アクティブな金融政策」をとることが、経済に安定をもたらす（決定的な定常状態を発生させる）と多くの研究で主張されていた[1]。それに対し、Benhabib et al. (2001) は、「ゼロ金利制約を考慮したテイラールール」を採用した場合、2つの定常状態を発生させることを指摘した。

アクティブな金融政策をとった場合、狙い通りの「望ましい定常状態」を発生させるが、他方でもう一つの「望ましくない定常状態」（低位均衡）を発生させる。後者の定常状態では、名目利子率や物価上昇率が前者の定常状態よりも低く、場合によってはデフレーションとなる。

[1]例えば、Leeper (1991) を参照のこと。

本稿では、Inoue and Tsuzuki (2011) のモデルに対し、この「ゼロ金利制約を考慮したテイラールール」を導入する。このようなモデルの定常状態での物価上昇率、名目利子率、さらには産出ギャップについて分析する。その結果以下のことが示される。産出ギャップがゼロになる「望ましい定常状態」を中央銀行が目指したとしても、期待の如何によっては「望ましくない定常状態」が実現することがある。その状態ではデフレーションを伴った産出ギャップが発生する。

Benhabib et al. (2001) と本稿の違いは以下の点にある。Benhabib et al. (2001) は、自然失業率仮説が成り立つ形式の NKPC を採用している。そのため、「望ましくない定常状態」といっても、低い名目利子率と物価上昇率がもたらされるということに留まっている。

それに対し本稿では、自然失業率仮説が成り立たない形式の NKPC を採用したため、「望ましくない定常状態」では、デフレーションばかりでなく雇用ギャップや産出ギャップがもたらされる可能性がある。それはつまり、長期デフレ不況が発生する可能性を示している。また、本稿では技術進歩を導入している点においても、Benhabib et al. (2001) と異なっており、技術進歩と物価上昇率との関係についても分析がなされている。

2 モデル

企業

企業は、異質的な労働力を、ディキシット=スティグリッツ型の関数に従って集計し、消費財を生産する[2]。 消費財の供給量 y は、

$$y(=h) = \left[\int_0^1 h_i^{\frac{\phi-1}{\phi}} di\right]^{\frac{\phi}{\phi-1}} \tag{2.1}$$

によって与えられる。ϕ は異質的な労働力の間の代替の弾力性を表すパラメータであり、$\phi > 1$ とする。$h_i(\equiv zl_i)$ は、異質的な労働力 i の数量である。 l_i は家計 i の雇用量 (労働量) である。z は労働者の技術水準であり、外生的な技術進歩率 g で増大する。すなわち、$\dot{z}/z = g$ である。

h は集計的な労働力である。式 (2.1) は、消費財を 1 単位作るのに、集計的な労働力が 1 単位必要だということを表してもいる。

[2]Dixit and Stiglitz (1977) および Blanchard and Kiyotaki (1987) を参照のこと。

W_i は家計 i によって設定される異質的な労働力 i の名目賃金率である。企業がそのコストを最小化する時、

$$h_i = \left(\frac{W_i}{W}\right)^{-\phi} h \tag{2.2}$$

が成立する。ただし、W は、

$$W = \left[\int_0^1 W_i^{1-\phi} di\right]^{\frac{1}{1-\phi}} \tag{2.3}$$

である。企業が完全競争市場におかれており、その利潤がゼロだと仮定すると、消費財の販売価格 p は $p = W$ となる。

家計

家計 i は毎期、消費 c と実質貨幣残高 m から効用を、雇用（労働）l_i から不効用を得る[3]。家計の時点効用を、

$$\ln c + \ln m - \frac{l_i^{1+\psi}}{1+\psi} - \frac{\gamma}{2}\omega_i^2 \tag{2.4}$$

と表す。$\psi(>0)$ は労働の限界不効用の弾力性を表すパラメータである。ω_i は名目賃金率 W_i の変化率 $\dot{W}_i/W_i$ である。$\frac{\gamma}{2}\omega_i^2$ は名目賃金率を変更することに伴う調整費用を表している[4]。γ は調整費用の大きさを表すパラメータであり、$\gamma \to 0$ ならば名目賃金率は伸縮的、$\gamma > 0$ ならば粘着的となる。

家計は、資産として貨幣と国債を持つ。国債は既発債のみが市場で取引されているものとし、家計の予算制約を

$$\dot{a} = ra + w_i h_i - c - Rm \tag{2.5}$$

とする。a は実質資産残高、$\pi(\equiv \dot{p}/p)$ は物価上昇率、R は国債の名目利子率、$r(\equiv R-\pi)$ は実質利子率、$w_i(\equiv W_i/p)$ は異質的な労働力 i の実質賃金率である。Rm は貨幣を持つことの機会費用を表している。

[3]正確には、c は c_i であり、m は m_i であるが、結局全ての家計の消費量、実質貨幣残高が同じになるので、ここでは単に c、m と記述する。a についても同様である。

[4]Rotemberg (1982) を参照のこと。

以上の設定により、家計 i は、次のような動学的最適化問題に直面することになる。

$$\max_{c,m,\omega_i} \int_0^\infty \left[\ln c + \ln m - \frac{l_i^{1+\psi}}{1+\psi} - \frac{\gamma}{2}\omega_i^2 \right] e^{-\rho t} dt$$

$$\begin{aligned} \text{subject to} \quad & \dot{a} = ra + w_i h_i - c - Rm \\ & \dot{W}_i = \omega_i W_i \\ & h_i = \left(\frac{W_i}{W} \right)^{-\phi} h \\ & h_i = z l_i \end{aligned}$$

$\rho(>0)$ は家計の主観的割引率である。

この動学的最適化問題を解くと

$$\frac{\dot{c}}{c} + \rho + \pi = R = \frac{c}{m} \tag{2.6}$$

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega} = \rho + \left[(\phi - 1)\frac{h}{c} - \phi l^{1+\psi} \right] \frac{1}{\gamma\omega} \tag{2.7}$$

が得られる (付録 A.1 を参照のこと)。式 (2.7) は賃金版ニューケインジアンフィリップス曲線である。

3 k%ルール

中央銀行

一定率の貨幣成長を常に保つという「フリードマンの k%ルール」は現在の中央銀行が実際の指針としている金融政策ではない。だが、長期においてどのような貨幣成長率が望ましいかを考える上で、このルールを導入したモデルによる分析は重要な意味を持つ。

ここで中央銀行は、貨幣量 M を一定の率 $\theta(>0)$ で増大させるものとする。すなわち、$\dot{M}/M = \theta$ である。実質貨幣残高 m は、$m = M/p$ と定義されるから、

$$\frac{\dot{m}}{m} = \frac{\dot{M}}{M} - \frac{\dot{p}}{p} = \theta - \pi \tag{3.1}$$

が成り立つ。

微分方程式系

消費財の市場清算条件 $c = y$ および $\omega = \pi$ を考慮すると、次のような微分方程式系を得る。

$$
\begin{aligned}
\frac{\dot{R}}{R} &= R - \rho - \theta && (3.2)\\
\frac{\dot{\pi}}{\pi} &= \rho + \left[\frac{\alpha}{1-\sigma} - l^{1+\psi}\right]\frac{\phi}{\gamma\pi} && (3.3)\\
\frac{\dot{l}}{l} &= \kappa - g && (3.4)
\end{aligned}
$$

ただし、$\kappa(\equiv \dot{c}/c)$ は、

$$
\kappa = R - \rho - \pi
$$

である。

定常状態

この微分方程式系の非自明な定常値は、

$$
R^* = \rho + \theta, \quad \pi^* = \theta - g, \quad l^* = \left(\frac{\rho\gamma\pi^* + \alpha\phi}{\phi}\right)^{\frac{1}{1+\psi}} \tag{3.5}
$$

となる。ただし、*の付された変数は定常値を表している。

この定常状態で評価したヤコビ行列は、正の実固有値を 2 つ、負の実固有値を 1 つ持つ。R, π, l は全てジャンプ変数なので、定常状態へ至る経路のどこが選択されるかは不決定である。ただし、定常状態に収束するという意味で安定的である。

式 (3.5) からは、以下のことが分かる。定常状態における利子率 R^* は主観的割引率 ρ と貨幣成長率 θ との和である。物価上昇率 π^* は貨幣成長率 θ と技術進歩率 g との差である。雇用量 l^* は物価上昇率 π^* が高いほど大きくなる。

4　テイラールール

中央銀行

次に、「フリードマンのk%ルール」に代わって「ゼロ金利制約を考慮したテイラールール」を採用する。Benhabib et al. (2001) に倣って、そのルールを

$$R = R(\pi) = \bar{R}e^{\frac{A}{\bar{R}}(\pi-\bar{\pi})} \tag{4.1}$$

として特定化する。$\bar{R}(>0)$ を目標利子率、$\bar{\pi}$ を目標物価上昇率と呼ぶことにする。それらはそれぞれ、中央銀行が定常状態における目標としている名目利子率、物価上昇率である。$A(>0)$ はパラメータである。

式 (4.1) の下では、全ての π に対し $R \geq 0$ が成り立っており、ゼロ金利制約が満たされている。なお、$R'(\pi) = Ae^{\frac{A}{\bar{R}}(\pi-\bar{\pi})} > 0$ かつ $R''(\pi) = \frac{A^2}{\bar{R}}e^{\frac{A}{\bar{R}}(\pi-\bar{\pi})} > 0$ なので、式 (4.1) は逓増的な単調増加関数である。

式 (2.6) により、定常状態では

$$R^* = \pi^* + \rho + \kappa^* \tag{4.2}$$

が成り立つ。ただし、R^* は名目利子率 R の、π^* は物価上昇率 π の、κ^* は $\kappa(\equiv \dot{c}/c)$ のそれぞれ定常値である。以降、*の付された変数は全て定常値を表す。式 (4.2) は「定常状態におけるフィッシャー方程式」である。以下では単に「フィッシャー方程式」と呼ぶことにする。

目標利子率 $\bar{R}$ と目標物価上昇率 $\bar{\pi}$ はこのフィッシャー方程式と整合的でなければならない。したがって、

$$\bar{R} = \bar{\pi} + \rho + \kappa^* \tag{4.3}$$

が満たされるものとする。

微分方程式系

消費財の市場清算条件 $c = y$ および $\omega = \pi$ を考慮すると、次のような微分方程式系を得る。

$$\frac{\dot{\pi}}{\pi} = \rho + \left[\alpha - l^{1+\psi}\right] \frac{\phi}{\gamma\pi} \tag{4.4}$$

$$\frac{\dot{l}}{l} = \kappa - g \tag{4.5}$$

ただし、

$$\begin{aligned} \kappa &= R - \rho - \pi \\ &= [\bar{R} e^{\frac{A}{R}(\pi - \bar{\pi})}] - \rho - \pi \end{aligned} \tag{4.6}$$

である。

定常状態における物価上昇率

式 (4.5) により、$\kappa^* = g$ が成り立つ。また、テイラールールを表す式 (4.1) とフィッシャー方程式を表す式 (4.2) により、定常状態では、

$$F(\pi^*) = \bar{R} e^{\frac{A}{R}(\pi^* - \bar{\pi})} - \rho - g - \pi^* = 0 \tag{4.7}$$

が成り立つ。陰関数 $F(\pi^*) = 0$ の解のうちの 1 つは $\pi^* = \bar{\pi}$ である。

Proposition 1 $F(\pi^*) = 0$ について次のことが言える。

- $A = 1$ のとき、$\bar{\pi}$ が唯一の実数解である
- $A < 1$ のとき、2 つの実数解 $\bar{\pi}$ と $\pi_2^*(> \bar{\pi})$ が存在する
- $A > 1$ のとき、2 つの実数解 $\bar{\pi}$ と $\pi_2^*(< \bar{\pi})$ が存在する

proof. 付録を参照のこと。 □

さらに、π_2^* について次の命題が成り立つ。

Proposition 2 $A > 1$ のとき、

$$A > A_c \equiv \begin{cases} \Pi^{-1} \log(1-\Pi)^{-1} & \text{for } \Pi \neq 0, \\ 1 & \text{for } \Pi = 0, \end{cases} \quad \text{where} \quad \Pi \equiv \frac{\bar{\pi}}{\bar{R}}.$$

を A が満たすならば[5]、$\pi_2^* < 0$ である（たとえ、$\bar{\pi} > 0$ であっても、$\pi_2^* < 0$ となる）。

proof. 付録を参照のこと。 □

この命題から、$\pi = \pi_2^*$ となる定常状態ではデフレーションの発生する可能性があることが分かる。それも、目標物価上昇率 $\bar{\pi}$ をプラスにしたとしても、$\pi = \pi_2^*$ となる定常状態ではデフレーションが発生し得るのである。

なお、式 (4.1) を微分して $\pi = \bar{\pi}$ とおくと、$R'(\bar{\pi}) = A$ が得られる。したがって、$A > 1$ の場合には $R'(\bar{\pi}) > 1$ であり、$\pi = \bar{\pi}$ の近傍でアクティブな金融政策がとられていることになる。$A < 1$ の場合には、その逆でパッシブな金融政策がとられていることになる。

定常状態の動学的性質

Proposition 1 で示したように、$A \neq 1$ のとき 2 つの定常状態の π の値、$\bar{\pi}$ と π_2^* が存在する。それぞれに対応する l の定常値を l_1^*、l_2^* とすると、

$$l_1^* = \left[\frac{\rho\gamma\bar{\pi} + \phi\alpha}{\phi} \right]^{\frac{1}{1+\psi}}, \quad l_2^* = \left[\frac{\rho\gamma\pi_2^* + \phi\alpha}{\phi} \right]^{\frac{1}{1+\psi}}$$

となる。

Proposition 3 $A > 1$ のとき、$(\bar{\pi}, l_1^*)$ は決定的（determinate）、(π_2^*, l_2^*) は不決定的（indeterminate）である。$A < 1$ のとき、$(\bar{\pi}, l_1^*)$ は不決定的、(π_2^*, l_2^*) は決定的である。

proof. 付録を参照のこと。 □

[5] $\bar{\pi} > 0$、つまり $\bar{\Pi} > 0$ のとき、$A_c > 1$ が成立する。一方で $\bar{\pi} \leq 0$ のとき、$A_c \leq 1$ であり、よって $A > 1$ であるならば $A > A_c$ は必ず満たされる。

物価上昇率に対して強く名目利子率を反応させるアクティブな金融政策 ($R'(\pi) > 1$) を取るべきだという主張が多くの研究によってなされてきた。これは「テイラー原理」として知られており、この原理にしたがった金融政策を実施すれば、定常状態が決定的となり、経済が安定化すると一般に考えられている。

ところが本稿のモデルでは、目標名目利子率 $\bar{\pi}$ が実現する定常状態を目指し、また「テイラー原理」にしたがってその定常状態が決定的になるようにアクティブな金融政策を実施する ($A > 1$ とする) と、不決定的なもう一つの定常状態が生み出されてしまう。それは Benhabib et al. (2001) の指摘どおりである。

以下では、このアクティブな金融政策の副作用を考えるために、$A > 1$ を仮定しよう。図 1 では、横軸に物価上昇率 π を縦軸に名目利子率 R を取っている。曲線がテイラールールすなわち式 (4.1) を、直線がフィッシャー方程式すなわち式 (4.2) をそれぞれ表しており、これらの線の交点である H と L が定常状態である。

点 H は Benhabib et al. (2001) のいう「望ましい定常状態」(intended steady state) であり、点 L は「望ましくない定常状態」(unintended steady state) である。点 H は決定的であり、点 L は不決定的である。点 H では $\pi = \bar{\pi}$ であり、点 L では $\pi = \pi_2^*$ である。点 L のような定常状態は、点 H に比べて名目利子率も物価上昇率も低いので、「低位均衡」とも呼ばれている。

なお、π と l はともにジャンプ変数なので、経済主体の期待の如何によって、点 H と点 L のどちらの定常状態も実現する可能性がある。

現実の産出量と自然産出量の関係

望ましい定常状態（図 1 の点 H の定常状態）にある時の産出量 y_1^* は、

$$y_1^* = z\left[\frac{\rho\gamma\bar{\pi} + \phi\alpha}{\phi}\right]^{\frac{1}{1+\psi}} \tag{4.8}$$

である。望ましくない定常状態（図 1 の点 L の定常状態）にある時の産出量 y_2^* は、

$$y_2^* = z\left[\frac{\rho\gamma\pi_2^* + \phi\alpha}{\phi}\right]^{\frac{1}{1+\psi}} \tag{4.9}$$

である。今、$A > 1$ なので、$\bar{\pi} > \pi_2^*$ であり、$y_1^* > y_2^*$ である。

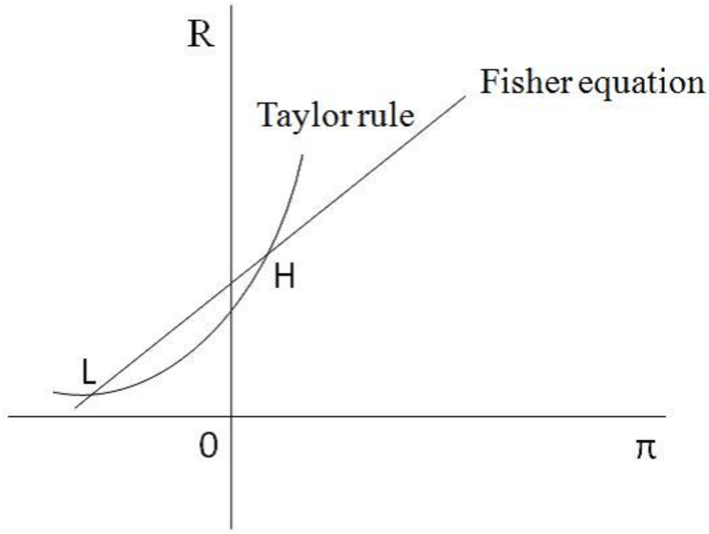

図 1: 2 つの定常状態

以下では、定常状態における現実の産出量 y^* に注目し、自然産出量と比較したい。現実の産出量とは価格粘着的な経済 ($\gamma > 0$) における産出量のことであり、自然産出量とは価格伸縮的な経済 ($\gamma \to 0$) における産出量である。ただし、定常状態における現実の産出量には、y_1^* と y_2^* の 2 つの可能性がある。

自然産出量はどのような値になるだろうか。自然雇用水準 l_n は物価上昇率に関わりなく常に、

$$l_n = \alpha^{\frac{1}{1+\psi}}$$

となり、自然産出量 y_n は

$$\begin{aligned} y_n &= zl_n \\ &= z\alpha^{\frac{1}{1+\psi}} \end{aligned}$$

となる。

$\pi^* = 0$ である時、y^* は (y_1^* であれ y_2^* であれ) 自然産出量 y_n に等しくなる。定常状態の産出ギャップ GAP^* は、定常状態における現実の産出量 y^* と自然産出量 y_n との差であり、

$$\mathrm{GAP}^* = y^* - y_n \tag{4.10}$$

である。

したがって、産出ギャップをゼロにするために目標物価上昇率をゼロとした場合 ($\bar{\pi} = 0$)、望ましい定常状態が実現するならば、狙い通りに産出ギャップは解消される。すなわち、$\mathrm{GAP}^*(= y_1^* - y_n) = 0$ となる。

ところが、望ましくない定常状態が実現するならば、デフレーションとなり ($\pi_2^* < \bar{\pi} = 0$)、産出ギャップが発生する。すなわち、$\mathrm{GAP}^*(= y_2^* - y_n) < 0$ となる。また、雇用量 l_2^* は自然雇用水準 l_n を下回っており、雇用ギャップも発生している。このような状態は長期的なデフレ不況として解釈することができる。なお、目標物価上昇率 $\bar{\pi}$ をゼロではなくプラスにしたとしても、$\pi_2^* < 0$ の可能性があることは proposition 2 で述べたとおりである。

技術進歩率と物価上昇率の関係

技術進歩率 g と「望ましくない定常状態」における物価上昇率 π_2^* との関係についての以下の命題が成り立つ。

Proposition 4 $A > 1$ のとき、技術進歩率 g の上昇は π_2^* を低下させる。$A < 1$ のとき、g の上昇は π_2^* を上昇させる。

proof. 付録を参照のこと。 □

したがって、アクティブな金融政策をとっている場合、技術進歩率の上昇は「望ましくない定常状態」における物価上昇率を低下させ産出ギャップや雇用ギャップを拡大させる。これは一種の「技術的失業」を表している。すなわち、望ましくない定常状態においては、速い技術進歩が雇用ギャップを拡大させるという負の効果を持つのである。

5 結論

本稿では、Inoue and Tsuzuki (2011) と同様に、「技術進歩」と「ニューケインジアンフィリップス曲線」を含む DGE モデルを構築した。ただし、金融政策として Benhabib et al. (2001) で提示された「ゼロ金利制約を考慮したテイラールール」を採用した。その結果、「望ましい定常状態」と「望ましくない定常状態」の 2 つが発生した。産出ギャッ

プがゼロになる望ましい定常状態を中央銀行が目指したとしても、期待の如何によっては望ましくない定常状態が実現することがある。後者の定常状態ではデフレーションを伴った産出ギャップがもたらされる。これはつまり、長期デフレ不況が発生する可能性を示している。

A　付録

A.1　家計の動学的最適化

ハミルトン関数を、

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} = \ln c + \ln m - \frac{1}{1+\psi}\left[\left(\frac{W_i}{W}\right)^{-\phi}\frac{h}{z}\right]^{1+\psi} - \frac{\gamma}{2}\omega_i^2 \\
+ \mu_1\left[ra + \frac{W_i}{p}\left(\frac{W_i}{W}\right)^{-\phi}h - c - Rm\right] + \mu_2\omega_j W_j
\end{aligned}
$$

と設定する。ここで、μ_1 と μ_2 はそれぞれ状態変数 a と W_i の共役変数である。最適化のための一階の条件は、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial c} &= \frac{1}{c} - \mu_1 = 0 && \text{(A.1)}\\
\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial m} &= \frac{1}{m} - \mu_1 R = 0 && \text{(A.2)}\\
\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial \omega_j} &= -\gamma\omega_j + \mu_2 W_i = 0 && \text{(A.3)}\\
\dot{\mu_1} &= \rho\mu_1 - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial a} = (\rho - r)\mu_1 && \text{(A.4)}\\
\dot{\mu_2} &= \rho\mu_2 - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial W_i} \\
&= \rho\mu_2 - \left[\frac{\phi(h_i/z)^{1+\psi}}{W_i} + \mu_1(1-\phi)\frac{h_i}{p} + \mu_2\omega_i\right] && \text{(A.5)}
\end{aligned}
$$

となる。

式 (A.5) は

$$
\frac{\dot{\mu_2}}{\mu_2} = \rho - \left[\frac{\phi(h_i/z)^{1+\psi}}{W_i} + \mu_1(1-\phi)\frac{h_i}{p}\right]/\mu_2 - \omega_i
$$

と書き換えられる。$\mu_1 = 1/c$ と $\mu_2 = \gamma\omega_i/W_i$ をこの式に代入すると、

$$\frac{\dot{\omega}_i}{\omega_i} - \frac{\dot{W}_i}{W_i} = \rho - \left[\phi\frac{(h_i/z)^{1+\psi}}{W_i} + \frac{1}{c}(1-\phi)\frac{h_i}{p}\right] / \left(\frac{\gamma\omega_i}{W_i}\right) - \omega_i$$

が得られる。

この式は、$W_i = W$、$\omega_i = \omega$、$h_i = h$、$l = h/z$ を用いると、

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega} - \omega = \rho - \left[\phi\frac{l^{1+\psi}}{W} + (1-\phi)\frac{h}{pc}\right]\frac{W}{\gamma\omega} - \omega$$

あるいは、

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega} = \rho - \phi\frac{l^{1+\psi}}{\gamma\omega} + (\phi-1)\frac{hw}{\gamma c\omega}$$

となる。

A.2 Proposition 1 の証明

$F(\cdot)$ は

$$\lim_{\pi\to\infty} F(\pi) = \lim_{\pi\to-\infty} F(\pi) = \infty$$

で下に凸の単峰型のグラフである。$F'(\pi^*) = Ae^{-\frac{A}{R}(\pi^*-\bar{\pi})} - 1$ であり、$F'(\bar{\pi}) = A - 1$ なので、以下のことが成り立つ。

- $A = 1$ の時 F は $\bar{\pi}$ で極小となる。よって、$\bar{\pi}$ が唯一の解となる。
- $A > 1$ の時 F は $\bar{\pi}$ で正の傾きを持つ。よって、$\bar{\pi}$ の左側にもう 1 つの解を持つ。
- $A < 1$ の時 F は $\bar{\pi}$ で負の傾きを持つ。よって、$\bar{\pi}$ の右側にもう 1 つの解を持つ。

A.3　Proposition 2 の証明

Proposition 1 より、$A > 1$ の時 $\pi_2^* < \bar{\pi}$ である。したがって、$\bar{\pi} \leq 0$ であれば、$\pi_2^* < 0$ である。

$\bar{\pi} > 0$ の時、$A > A_c(> 1)$ であれば

$$F(0) = \bar{R}e^{-\frac{A}{\bar{R}}\bar{\pi}} - \rho - g < 0$$

となる。したがって、この場合も $\pi_2^* < 0$ となる。

以上の結果より、$A > A_c$ であれば、必ず $\pi_2^* < 0$ となる。

A.4　Proposition 3 の証明

式 (4.4)、(4.5) から成る微分方程式系の定常状態で評価したヤコビ行列 $\boldsymbol{J}^*$ は、

$$\boldsymbol{J}^* = \begin{bmatrix} \rho & -\frac{\phi}{\gamma}(1+\psi)(l^*)^{\psi} \\ l^* F'(\pi^*) & F(\pi^*) \end{bmatrix}, \quad (\pi^*, l^*) = \{(\bar{\pi}, l_1^*), (\pi_2^*, l_2^*)\}$$

であり、$F(\pi^*) = 0$ なので、その行列式は

$$\det \boldsymbol{J}^* = \frac{\phi}{\gamma}(1+\psi)(l^*)^{1+\psi} F'(\pi^*)$$

となる。$\det \boldsymbol{J}^*$ の符号は、$F'(\pi^*)$ の符号によって決定される。$F'(\pi^*) > 0$ のとき行列式は正であり、$\mathrm{tr}\, \boldsymbol{J}^* = \rho > 0$ なので、$\boldsymbol{J}^*$ は実部が正の固有値を 2 つ持つことがわかる。よって、このとき定常状態 π^* は決定的である。$F'(\pi^*) < 0$ のとき、行列式は負であり、$\boldsymbol{J}^*$ は正と負の実部の固有値を 1 つずつ持つ。このとき π^* は鞍点となり不決定的である。

付録 A.2 の議論より、$A > 1$ のとき $F'(\bar{\pi}) > 0$ かつ $F'(\pi_2^*) < 0$ が成立する。一方で、$A < 1$ のとき、$F'(\bar{\pi}) < 0$ かつ $F'(\pi_2^*) > 0$ が成立する。以上より命題の主張が示される。

A.5　Proposition 4 の証明

式 (4.7) で定義される関数 F を、π^* と g の関数として $F(\pi^*, g)$ と書くことにする。$A \neq 1$ のとき、陰関数定理を用いて g と π^* についての以下の関係を示すことができる。

$$\frac{d\pi^*}{dg} = -\frac{F_g(\pi^*, g)}{F_{\pi^*}(\pi^*, g)}$$

ただし、$F_g(\pi^*, g)$ は、F の g についての偏導関数を (π^*, g) で評価した値を表す。$F_{\pi^*}(\pi^*, g)$ も同様である。

式 (4.7) を g で偏微分すると、

$$F_g(\pi^*, g) = e^{\frac{A}{\bar{R}}(\pi^* - \pi)} \left[1 - \frac{A}{\bar{R}}(\pi^* - \bar{\pi}) \right] - 1$$

が得られる。$F_g(\bar{\pi}, g) = 0$ であり、また $\pi^* \neq \bar{\pi}$ について $F_g(\pi^*, g) < 0$ となる[6]。よって、A の値に関わらず $F_g(\pi_2^*, g) < 0$ が必ず成立する。$A > 1$ のとき $\pi_2^* < \bar{\pi}$ なので、$F_{\pi^*}(\pi_2^*, g) < 0$ であり $\frac{d\pi_2^*}{dg} < 0$ が成り立つ。一方で、$A < 1$ のとき $\pi_2^* > \bar{\pi}$ なので、$F_{\pi^*}(\pi_2^*, g) > 0$ なので $\frac{d\pi_2^*}{dg} > 0$ が成立する。

参考文献

[1] Benhabib, J., S. Schmitt-Grohe and M. Uribe (2001) “The Perils of Taylor Rules,” *Journal of Economic Theory,* 96, pp.40-69.

[2] Blanchard, O. J. and N. Kiyotaki (1987) “Monopolistic Competition and the Effects of Aggregate Demand,” *American Economic Review* 77, pp.647-666.

[3] Dixit, A. K. and J. E. Stiglitz (1977) “Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity,” *American Economic Review* 67, pp.297-308.

[4] Inoue, T. and E. Tsuzuki (2011) “A New Keynesian Model with Technological Change,” *Economics Letters,* 110, 3, pp.206-208.

[5] Leeper, E. (1991) “Equilibria under “active” and “passive” monetary and fiscal policies,” *Journal of Monetary Economics,* 27, pp.129-147.

[6] Rotemberg, J. J. (1982), “Sticky Prices in the United States,” *Journal of Political Economy,* 99, pp.1187-1211.

[6] 一般に、関数 $e^{\zeta}(1-\zeta)$ は、$\zeta = 0$ のとき最大値 1 をとり、$\zeta \neq 0$ では 1 未満となる。